OBRAS PUBLICADAS PELO AUTOR

Portaria Ministerial de 18 de abril de 1931

Primeiro Ano de Matemática. *Dezenove edições,* 95 milheiros.
Volume cartonado . . . . Cr.$ 13,00

Segundo Ano de Matemática. *Treze edições,* 65 milheiros.
Volume cartonado . . . . Cr.$ 14,00

Terceiro Ano de Matemática. *Nove edições,* 45 milheiros.
Volume cartonado . . . . Cr.$ 15,00

Quarto Ano de Matemática. *Sete edições,* 35 milheiros.
Volume cartonado . . . . Cr.$ 13,00

Quinto Ano de Matemática. *Quatro edições,* 20 milheiros.
Volume cartonado . . . . Cr.$ 1500,

Geometria plana, obra completa para a terceira e a quarta série dos cursos ginasiais. *Volume cartonado* . . . . Cr.$ 12,00

Exercícios de Matemática — Segundo Ano. 1 300 exercícios numéricos e problemas, com os reeultados. *Brochura* . . . . Cr.$ 5,00

Exercícios de Matemática — Terceiro Ano. 1 400 exercícios numéricos e problemas, com os reeultados. *Brochura* . . . . Cr.$ 6,00

Exercícios de Matemática — Quarto Ano. 900 exercícios numéricos e problemas, com os resultados. *Brochura* . . . . Cr.$ 5,00

Exercícios de Matemática — Quinto Ano. 900 exercícios numéricos e problemas, com os resultados. *Brochura* . . . . Cr.$ 5,00

Portaria Ministerial de 11 de julho de 1942

Elementos de Matemática, Primeiro Volume.
Doze edições, 60 milheiros. *Volume cartonado* . . . . Cr.$ 15,00

Elementos de Matemática, Segundo Volume.
Oito edições, 40 milheiros. *Volume cartonado* . . . . Cr.$ 14,00

Elementos de Matemática, Terceiro Volume.
Oito edições, 40 milheiros. *Volume cartonado* . . . . Cr.$ 16,00

Elementos de Matemática — Quarto Volume.
Cinoc edições, 25 milheiros. *Volume cartonado* . . . . Cr.$ 16,00

Problemas de Matemática — Primeira Série Ginasial
780 exercícios, com os resultados. *Brochura* . . . . Cr.$ 6,00

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
RUA DOS GUSMÕES, 639 — SÃO PAULO

SÉRIE 2.ª — LIVROS DIDÁTICOS — VOL. 136
BIBLIOTECA PEDAGÓGICA BRASILEIRA

Prof. Jacomo Stávale

Elementos de Matemática

QUARTO VOLUME

para a

Quarta Série do Curso Ginasial

280 exercícios orais e de classe
1 400 exercícios escritos e problemas

> *A Matemática é um dos mais elevados exercícios do espírito, e o instrumento mais eficaz para o progresso mental e moral do homem.*
>
> H. WIELEITNER

3.ª edição — 15 milheiros

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO - RIO DE JANEIRO - BAÍA - RECIFE - PÔRTO ALEGRE
1944

Quarto Ano de Matemática

CONTA-SE que Ptolomeu Filadelfo, rei do Egito, quando, ainda moço, aprendia com Euclides, pediu ao mestre que lhe simplificasse algumas demonstrações geométricas. E o sábio matemático respondeu-lhe: «*Senhor, não há na Geometria caminhos particulares para os reis*».

O professor Jacomo Stávale, entretanto, sem abrir caminhos particulares para os jovens que se iniciam na Matemática, soube tornar-lhes mais suave o estudo da ciência de Pitágoras e de Euclides. Com uma larga experiência do magistério, tendo lecionado Matemática a milhares de alunos, e inteiramente convencido de que é impossível ensinar a MATEMÁTICA PURA aos moços recem-saídos da escola primária, conseguiu, com uma habilidade nem por todos ainda compreendida, evitar as asperezas que os jovens estudantes encontram no caminho árido da abstração, tornando-lhes assim mais amena a aquisição das primeiras noções da ciência que imortalizou Leibnitz, Newton, Descartes, e tantos outros.

Uma excelente orientação didática e sólidos conhecimentos da matéria em que se aprimorou, permitiram ao professor Stávale esta coleção de excelentes obras, que ora chega à quarta série, e de cujo valor é eloqüente testemunho o elevado número de edições em pouco tempo esgotadas.

A clareza da exposição, a criteriosa gradação das dificuldades, os numerosos e eficientes exercícios orais, a cuidadosa escolha dos problemas para habituar o educando ao rigor do raciocínio, explicam o êxito que êste curso de Matemática tem alcançado. E tal êxito irá merecidamente coroar o volume ora publicado, o qual constitue um ótimo serviço prestado aos estudantes que, não procurando os caminhos tortuosos desejados por Ptolomeu, bendizem, entretanto, os que sabem aplainar-lhes as dificuldades existentes na estrada reta que os leva à conquista da ciência de Arquimedes.

Fevereiro de 1935.

JOAQUIM SILVA

Prefácio

Sans les Mathématiques, on ne pénètre point au fond de la Philosophie; sans la Philosophie, on ne pénètre point au fond des Mathématiques; sans les deux, on ne pénètre au fond de rien.

LEIBNITZ

Neste volume procurei desenvolver, de um modo tão simples e claro quanto possível, o programa de Matemática da quarta série ginasial, de acôrdo com a portaria ministerial n.º 170 de 11 de julho de 1942.

Os problemas do primeiro grau com duas incógnitas foram apresentados em três séries, logo depois dos parágrafos 9, 11 e 12, nos quais ensinei os métodos mais simples para resolver sistemas do primeiro grau com duas incógnitas. Entretanto, as considerações gerais sôbre êstes mesmos problemas estão nos parágrafos 28 a 36. Falta de método apenas aparente.

Com efeito, seguindo à risca o programa oficial, os problemas acima mencionados deveriam figurar no final da **Unidade I.** Pareceu-me, porém, mais acertado, apresentar tais problemas, logo depois de ensinar os métodos de eliminação; ensinado um dêsses métodos impõe-se, a meu ver, a necessidade de dar ao aluno todos os exercícios e problemas necessários para firmar o conhecimento dêsse mesmo método.

Entretanto, é claro que os srs. professores podem dar os problemas do primeiro grau com duas incógnitas, depois do parágrafo 36, se assim julgarem mais acertado.

* * *

Desenvolvendo a **Unidade III,** dei algumas noções bem elementares sôbre as equações biquadradas e irracionais. Claro é que não se trata de matéria extranha ao programa, visto que tais equações se reduzem, quasi sempre, a equações do segundo

grau. Aliás, essas noções se nos afiguram indispensáveis. Por exemplo, *se quisermos calcular as dimensões de um retângulo, sendo dadas a diagonal e a área*, teremos de resolver *um sistema do segundo grau com duas incógnitas*, o qual, depois de eliminada uma das incógnitas, nos conduz a uma equação biquadrada.

Relativamente às equações irracionais, não podemos por em dúvida a utilidade do conhecimento de alguns tipos bem simples dessas equações. Por exemplo, no problema do poço (§ 76) temos de resolver uma equação irracional, aliás muito simples.

* * *

Com êste compêndio fica concluída a minha nova série de livros para o ensino da Matemática no primeiro ciclo do curso ginasial. Procurei desenvolver o programa oficial, de um modo tão completo quanto possível, colocando-me sempre ao nível dos jovens que freqüentam êsse primeiro ciclo.

Senões, é muito provável que existam nestes quatro volumes; aos meus amigos que lecionam Matemática, que são milhares e que, de todos os recantos de nossa pátria, me distinguiram sempre com palavras de aplauso e confôrto eu peço, com a sinceridade de sempre, que se dignem honrar-me com a sua crítica serena e imparcial.

São Paulo, outubro de 1943

O AUTOR

Rua Safira, 9

Abreviaturas usadas neste livro

E.M.P.V.	Elementos de Matemática, 1.° volume
E.M.S.V.	Elementos de Matemática, 2.° volume
E.M.T.V.	Elementos de Matemática, 3.° volume
C.Q.D.	Como queríamos demonstrar.
o.p.v.	opostos pelo vértice
t.p.m.	tem por medida
alt.-int.	alternos-internos
alt.-ext.	alternos-externos
col.-int.	colaterais-internos
col.-ext.	colaterais-externos

H	hipótese	T	tese
$\bigcirc$	circunferência	ⓢ	circunferências
$\perp$	perpendicular	$\perp_s$	perpendiculares
$\triangle$	triângulo	$\triangle_s$	triângulos
$\neq$	diferente de	$\parallel$	paralela ou paralelas
▱	paralelogramo	▱s	paralelogramos
$\angle$	ângulo	$\angle_s$	ângulos
hip.	hipótese	$\therefore$ ...	donde, portanto, então
compls. .	complementares	supls. .	suplementares
$\hat{ABC}$ ...	ângulo ABC	$\hat{1}$	ângulo 1
$\hat{A}$	ângulo A	$\sim$	semelhante ou semelhantes
tang. ...	tangente	sec. ...	secante

Índice-Sumário

ÁLGEBRA

Cap. I — Equações do Primeiro Grau

Cap. II — Teoria das Desigualdades

ÁLGEBRA

CAPÍTULO I

Equações do Primeiro Grau

1. As coordenadas cartesianas no plano. O quadro-negro da nossa sala de aula é um plano. Neste plano há uma infinidade de pontos. (fig. 1). Como determinar a posição de um ponto qualquer dêste plano? Coube a René Descartes, notável matemático e filósofo francês do século XVII, a feliz e fecunda idéia de fixar a posição de um ponto qualquer de um plano, pelas suas distâncias a duas retas fixas dêste mesmo plano. Em um plano qualquer (fig. 2) tracemos duas retas, XX′ e YY′, $\perp$s entre sí, cortando-se em um certo ponto O. Êste ponto divide as duas retas em quatro semirretas OX, OX′, OY e OY′. Isto pôsto, vejamos como determinar a posição de um ponto qualquer de um plano, pelas suas distâncias às retas fixas XX′ e YY′ dêste mesmo plano.

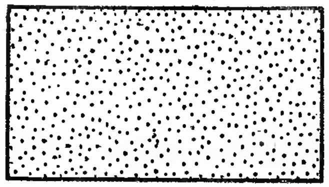


Fig. 1

Em primeiro lugar, quantos pontos existem neste plano, situados a 30mm da reta XX′? (fig.3) Uma infinidade; e todos êles estão situados nas retas AA′ e BB′, $\parallel$ à reta XX′, situadas uma de cada lado da reta XX′, e a 30mm de distância desta mesma reta. Portanto, se nos pedirem um ponto situado a 30mm da reta XX′, responderemos que o problema é indeterminado, porque

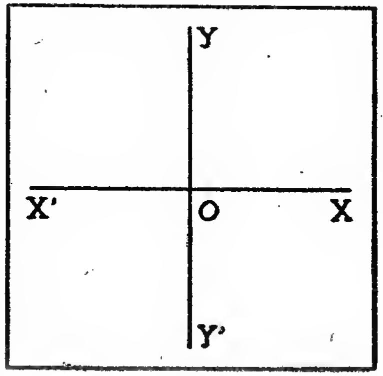


Fig. 2

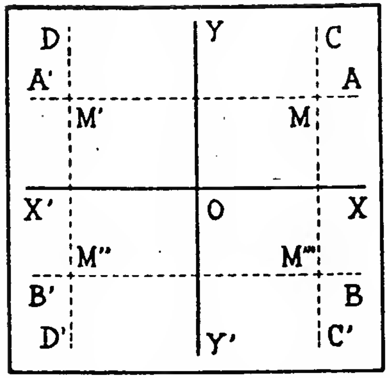


Fig. 3

há uma infinidade de pontos que resolvem o problema, e todos êles estão situados nas retas AA′ e BB′, cujas distâncias respectivas à reta XX′ são iguais a 30mm. Do mesmo modo, se nos pedirem um ponto situado a 40mm da reta YY′, responderemos ainda que êste problema é indeterminado, porque há uma infinidade de pontos que resolvem o problema, e todos êles estão situados nas retas CC′ e DD′, ‖ à reta YY′, uma de cada lado, e que dela distam 40mm.

E se nos pedirem um ponto do plano situado a 30mm da reta XX′ e a 40mm da reta YY′? (fig.3) Êste ponto, devendo estar situado ao mesmo tempo nas retas AA′ ou BB′, assim como nas retas CC′ ou DD′, a figura nos mostra que o problema ainda é indeterminado, porque tem várias soluções, *mas estas são apenas* **quatro,** *a saber*: os pontos M, M′, M″ e M‴.

Ora, a indeterminação dêste último problema vai desaparecer graças à seguinte convenção:

As distâncias contadas **acima** *da reta* XX′ *serão* **positivas** *e,* **abaixo, negativas;** *contadas* **à direita** *da reta* YY′ *serão* **positivas** *e,* **à esquerda, negativas.**

Com esta convenção, determinar um ponto situado a uma distância dada da reta XX′ e a uma distância também dada da reta YY′ é um problema perfeitamente determinado, desde que as distâncias dadas sejam prefixadas pelo sinal + ou pelo sinal —. Por exemplo, qual é o ponto situado a + 30mm de XX′ e a + 40mm de YY′? E' o ponto M. Qual é o ponto situado a — 30mm de XX′ e a — 40mm de YY′? E' o ponto M″.

A distância de um ponto qualquer do plano à reta **YY′** *é chamada* **abcissa** *dêste ponto; a distância do mesmo ponto à reta* XX′ *é chamada* **ordenada** *dêste ponto.*

A abcissa e a ordenada de um ponto M são chamadas **coordenadas retilíneas** ou **coordenadas cartesianas** do ponto M ou, simplesmente, as **coordenadas** dêste ponto.

As retas XX′ e YY′ são chamadas **eixos das coordenadas** ou **eixos coordenados.** O eixo XX′ é o *eixo das* **abcissas** ou *eixo dos* **x**; o eixo YY′ é o *eixo das* **ordenadas** ou *eixo dos* **y**; o ponto O, intersecção dos dois eixos, é chamado **origem das coordenadas** ou, simplesmente, **origem.**

Os eixos coordenados dividem o plano em quatro regiões, às quais chamaremos **quadrantes.**

O ângulo XOY *é o* **primeiro quadrante.**
O ângulo YOX′ *é o* **segundo quadrante.**
O ângulo X′OY′ *é o* **terceiro quadrante.**
O ângulo Y′OX *é o* **quarto quadrante.**

Portanto, o ponto M está no primeiro quadrante, o ponto M′ no segundo, o ponto M″ no terceiro e o ponto M‴ no quarto.

A abcissa e a ordenada de um ponto qualquer M são representadas abreviadamente pelas letras x e y, escrevendo as duas entre parênteses e de modo que a abcissa preceda sempre a ordenada. Assim, representando um ponto qualquer por A, a notação A (x, y) significa que a abcissa do ponto A é x, e a ordenada, y. Isto pôsto, vamos *construir* o ponto A (4, 2).

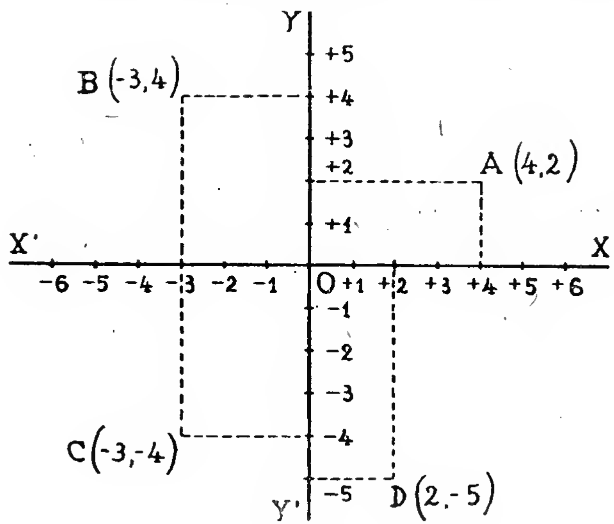


Fig. 4

Construir um ponto do qual se conhecem as coordenadas, *é determinar a sua posição no plano em que estão situados os eixos coordenados.*

Para construir o ponto A (4, 2) traçamos pelo ponto 4, do eixo das abcissas, (fig.4) uma ‖ ao eixo das ordenadas; pelo ponto 2, do eixo das ordenadas, uma ‖ ao eixo das abcissas; estas duas ‖ se cortam em um ponto A, que é o ponto pedido.

Para construir o ponto B (– 3, 4) traçamos pelo ponto – 3 do eixo das abcissas, uma ‖ ao eixo das ordenadas; pelo ponto 4 do eixo das ordenadas, uma ‖ ao eixo das abcissas; estas duas ‖ se cortam em um ponto B, que é o ponto pedido.

Do exposto é fácil compreender como construir o ponto C (– 3, – 4) e o ponto D (2, – 5).

Observações. Dois pontos quaisquer do espaço ou de um plano diferem entre si exclusivamente pela sua posição, e nada mais. Acabámos de ver que um ponto de um plano é determinado por dois números relativos; *é representado,* **algèbricamente,** *por dois números relativos.*

O processo exposto neste parágrafo para determinar a posição de um ponto qualquer de um plano, não é o único; há diversos outros modos de fixar a posição dêste ponto; *existem outros sistemas de coordenadas.* Recomendamos também aos estudantes que comparem as *coordenadas cartesianas* de um ponto qualquer do plano, com as coordenadas geográficas de um ponto qualquer da superfície da Terra.

Exercícios orais

1. Onde estão situados os pontos cuja abcissa é nula? E cuja ordenada é nula? Quais são as coordenadas da origem?
2. Em que quadrantes a abcissa é positiva? E negativa? Em que quadrantes a ordenada é negativa? E positiva?
3. Em que quadrante está situado o ponto A (– 5, – 6)? E o ponto B (8, – 15)? E o ponto C (– 9, 12)? E o ponto D (20, 30)?
4. Traça-se uma ‖ ao eixo das abcissas, *acima* dêste eixo, e a uma distância de 50mm. Quais são as coordenadas de um ponto qualquer desta reta? E quais serão as coordenadas dêste mesmo ponto, se a ‖ estiver situada *abaixo* do mesmo eixo, e a uma distância de 60mm?
5. Traça-se uma ‖ ao eixo das ordenadas, e a uma distância de 80mm dêste eixo. Quais serão as coodernadas de um ponto qualquer desta reta?
6. Dizer como variam as coordenadas de um ponto A, que se desloca paralelamente ao eixo das abcissas, e a 45mm dêste mesmo eixo. Mesma questão, supondo que o ponto A se desloca paralelamente ao eixo das ordenadas, e a 75mm dêste mesmo eixo.
7. Onde está situado o ponto (7, 7)? E o ponto (–7, 7)? E o ponto (–8, –8)? E o ponto (10, –10)?

Exercícios. Série I

Construir os pontos seguintes: (*)

1. (3, 8)	**5.** $\left(3\frac{1}{2},\ 5\frac{3}{4}\right)$	**9.** (3,6 , 4,7)
2. (– 6, 7)	**6.** $\left(-6,\ 4\frac{1}{2}\right)$	**10.** (– 5,2 , 8)
3. (– 5, – 11)	**7.** $\left(-1\frac{1}{2}, -4\frac{3}{10}\right)$	**11.** (– 4, – 5,2)
4. (8, – 6)	**8.** $\left(4,\ -4\frac{3}{5}\right)$	**12.** (6,5 , – 7)

13. Construir um △ cujos vértices são os pontos A (3, 0), B (– 3, 0) e C (0, 8). Que espécie de △ é êste?

14. Construir um quadrilátero ABCD cujos vértices são os pontos A (0, 0), B (5, – 3), C (10, 0) e D (5, 3). Que espécie de quadrilátero é êste?

2. Funções e variáveis. De que depende a área de um círculo? Depende do raio. Representando a área de um círculo por S e o raio por R, nós sabemos que: (E.M.S.V. § 101)

$$S = \pi \times R^2 \qquad (1)$$

Esta fórmula mostra claramente que, à medida que o raio aumenta, a área também aumenta; à medida que o raio diminue, a área também diminue. Quanto a π, não sofre a menor alteração; quer o raio aumente, quer diminua, π é sempre igual a 3,141 592 653 5... Portanto, na fórmula (1) *há quantidades que variam e quantidades que não variam*; π, que não varia, assim como o expoente 2, que também é invariável, são quantidades chamadas **constantes;** *R* e *S*, que variam, são quantidades chamadas **variáveis.**

As constantes podem ser **numéricas** ou **literais.** As constantes numéricas são também chamadas *constantes absolutas.* Na fórmula (1) π e o expoente 2 do raio são *constantes absolutas.* Na fórmula da área do quadrado, $S = l^2$, o expoente 2 é uma constante absoluta.

As constantes literais são também chamadas *constantes arbitrárias* ou *parâmetros.* Estas constantes são chamadas *arbi-*

(*) Para maior facilidade, êstes êxercícios podem ser feitos em papel milimetrado ou quadriculado.

trárias, porque *podem variar de um problema para outro*, **mas não variam nunca dentro do mesmo problema.**

Para evitar confusões, é hábito representar as constantes arbitrárias pelas primeiras letras do alfabeto: a, b, c, d, etc.; as variáveis pelas últimas: x, y, z, t, u, v. Em resumo:

A variável é uma quantidade que, dentro das condições que lhe são impostas por um determinado problema, pode passar por uma infinidade de valores. Na fórmula (1), R e S são variáveis porque, calculando a área de um círculo, podemos ter R igual a um número qualquer positivo, inteiro ou fracionário e real, variando de zero ao infinito positivo e, portanto, S pode também passar por uma infinidade de valores.

Já aprendemos que o volume de um cilindro de revolução é dado pela fórmula

$$v = \pi r^2 h \quad \text{(E.M.S.V. § 106)} \qquad (2)$$

Nesta fórmula, π e o expoente 2 são constantes absolutas; v, r e h são variáveis.

Entre as variáveis devemos distinguir as *variáveis independentes* e as *variáveis dependentes*. Um professor, querendo verificar se os seus alunos sabem calcular a área de um círculo, propõe-lhes a seguinte questão: «*O raio de um círculo mede 1 metro; qual é a área dêste círculo?*»

Ora, assim como o professor disse **1** *metro*, poderia ter dito **2** *metros*, **3** *metros*, **4** *metros*, etc.; *o comprimento que o professor atribue ao raio é inteiramente arbitrário;* **o raio é,** *neste problema,* **uma variável independente.** A área do círculo é também uma variável, porque ela será maior ou menor, conforme o raio for maior ou menor; mas, dando-se um valor determinado ao raio, *a área do círculo não poderá ser qualquer; estará sempre sujeita à fórmula* $S = \pi R^2$. A área do círculo é também uma variável; mas, *o valor desta variável* **depende** *do valor do raio;* é *uma* **variável dependente ou variável função.**

Existe, pois, uma **dependência** entre a área do círculo e o raio do mesmo círculo; a área do círculo *depende* do raio. Esta dependência é representada, em Matemática, pela palavra **função.** E tudo o que dissemos nestas linhas se resume no seguinte:

A área do círculo é uma **função do raio** *do mesmo círculo.*

A fórmula (2) nos diz que:

O volume de um cilindro de revolução é uma **função** *do raio da base do cilindro e da altura do mesmo.*

Seja N um número que queremos dividir em duas partes diretamente proporcionais aos números a e b. (E.M.S.V. § 79) Representando por x a primeira parte, teremos:

$$x = \frac{Na}{a+b} \qquad (3)$$

E diremos de um modo geral que:

O valor **x** *da primeira parte, é uma* **função** *de* **N, a** *e* **b.**

Os juros simples são calculados pela fórmula

$$j = \frac{cit}{100} \qquad (4)$$

E diremos de um modo geral que:

Os juros simples, **j,** *são uma função do capital* **c,** *da taxa* **i** *e do tempo* **t.**

Simbòlicamente podemos apresentar as fórmulas (1), (2), (3) e (4) do seguinte modo:

(1) $S = F(R)$	(3) $x = \varphi\,(N, a, b)$
(2) $v = f(r, h)$	(4) $j = \psi\,(c, i, t)$

(*)

Estas expressões se lêem assim:

S *é uma função* **F** *de* **R.**
v *é uma função* **f** *de* **r** *e* **h.**
x *é uma função* φ *de* **N, a** *e* **b.**
j *é uma função* ψ *de* **c, i** *e* **t.**

As letras F, **f**, φ e ψ significam que **S, v, x** e **j** são funções das quantidades entre parênteses; estas são as variáveis independentes e **S, v, x** e **j** são as variáveis dependentes ou, simplesmente, **funções.**

Podemos dar às letras F, f, φ e ψ, o nome de *símbolos funcionais* ou *características.*

(*) φ, letra grega, que se pronuncia *fi;* corresponde ao *f* português.
ψ, letra grega, que se pronuncia *psi;* corresponde ao *ps* português.

Dois símbolos funcionais diferentes indicarão sempre duas funções diferentes. Por exemplo, se tivermos

$$y = x^2 + 5x - 3 \quad (5) \qquad\qquad y = x^2 - 5x + 4 \quad (6)$$

não deveremos representar estas duas funções de x pelo mesmo símbolo funcional. Seria êrro escrever:

para a função (5) . . . . . $y = f(x)$
para a função (6). . . . . . $y = f(x)$

porque as duas funções (5) e (6) de x, são diferentes. Com efeito, as operações necessárias para calcular y, nestas duas funções, não são as mesmas. Se fizermos $x = 10$, teremos respectivamente para as duas funções:

$$y = 10^2 + 5 \times 10 - 3 = 147$$
$$y = 10^2 - 5 \times 10 + 4 = 54$$

Se quisermos pois escrever simbòlicamente as funções (5) e (6) deveremos adotar símbolos funcionais diferentes. Se, para a função (5) escrevermos $y = f(x)$, para a função (6) deveremos escrever $y = F(x)$ ou $y = \varphi(x)$ ou $y = \psi(x)$, adotando um símbolo funcional diferente de f.

Entretanto, se tivernos

$$y = F(x) = x^2 - 3x + 1$$

e quisermos calcular o valor desta função para $x = 2$ ou $x = 3$ ou $x = 4$, etc., poderemos escrever:

$$F(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 1$$
$$F(3) = 3^2 - 3 \times 3 + 1$$
$$F(4) = 4^2 - 3 \times 4 + 1, \text{ etc.,}$$

porque as operações que nos conduzem ao valor da função, isto é, de y, *são sempre as mesmas.*

Em resumo: *o mesmo símbolo funcional indica sempre a mesma lei de dependência entre a variável função e a variável independente, seja qual for o valor atribuído à variável. Nos casos mais simples esta lei é representada por uma série de operações analíticas sôbre a variável.* (Granville)

Consideremos a fórmula (4). Dela podemos deduzir sucessivamente:

$$c = \frac{100j}{it}, \quad i = \frac{100j}{ct}, \quad t = \frac{100j}{ci} \quad \text{(E.M.S.V. § 87)}$$

isto é, uma variável independente pode tornar-se dependente; uma variável dependente pode tornar-se independente. Da área do círculo, $S = \pi R^2$, deduzimos que:

$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

Esta transformação nos mostra que podemos atribuir a S um valor qualquer; o valor de R dependerá, porém, do valor de S; S é agora uma variável independente e R, a variável dependente, isto é, a função.

Exercícios. Série II

Sendo $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ calcular:

1. $f(1)$	**4.** $f(-2)$	**7.** $f\left(\frac{2}{3}\right)$	**10.** $f(x-1)$
2. $f(-1)$	**5.** $f\left(\frac{1}{2}\right)$	**8.** $f\left(-\frac{2}{3}\right)$	**11.** $f(1+y)$
3. $f(2)$	**6.** $f\left(-\frac{1}{2}\right)$	**9.** $f(x+1)$	**12.** $f(1-y)$

13. Dada a função $f(y) = y(y-1)(y+1)(y-2)(y+3)$, provar que $f(0) = f(1) = f(-1) = f(2) = f(-3)$.

14. Dada a função $f(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$, provar que $f(1) = f(2) = f(3) = f(4)$.

15. Se $\varphi(x) = \dfrac{2x-3}{x+7}$, calcular $\varphi(\sqrt{2})$ (Granville)

16. Se $\varphi(x) = x^{2n} + x^{2m} + 1$, demonstrar que:
$\varphi(1) = 3 \qquad \varphi(0) = 1 \qquad \varphi(a) = \varphi(-a)$ (Granville)

17. Se $f(m) = \dfrac{m-1}{m+1}$, demonstrar que:

$$\frac{f(a) - f(b)}{1 + f(a)\,f(b)} = \frac{a - b}{1 + ab}$$ (Granville)

18. Se $f(x) = x^2 - 2x - 3$, calcular $f(x-1)$, $f(x-2)$.

3. Equações com duas incógnitas. Dada uma equação com duas incógnitas, como por exemplo, $3x - 2y = 4$, podemos atribuir a x e y uma infinidade de valores. E' o que vamos tornar claro com a resolução de um problema.

Em um segundo ano ginasial, a diferença entre o triplo do número de meninas e o dôbro do número de meninos, é igual a 4. Determinar o número de meninas e o de meninos.

Seja x o número de meninas e y, o de meninos. O problema impõe a estas duas incógnitas *uma única condição;* a diferença entre o triplo do número de meninas e o dôbro do número de meninos é igual a 4. Traduzindo esta condição em linguagem algébrica, teremos a seguinte equação:

$$3x - 2y = 4 \qquad (1)$$

Tirando desta equação o valor de y, resulta:

$$y = \frac{3x - 4}{2} \qquad (2)$$

As equações (1) e (2) são eqüivalentes. Com efeito, para passar da equação (1) para a equação (2) é preciso:

a) Passar $2y$ para o segundo membro.

b) Passar 4 para o primeiro membro.

c) Dividir ambos os membros da equação por 2. (E.M.T.A. §§ 67 a 70)

Portanto, é indiferente resolver a equação (1) ou (2); os valores de x e y serão os mesmos para as duas equações.

Tomando a equação (2) e dando a x um valor qualquer, por exemplo, 10, teremos:

$$y = \frac{3 \times 10 - 4}{2} \quad \therefore \quad y = 13$$

Portanto, $x = 10$ e $y = 13$ constituem uma solução da equação (1), como é fácil verificar. (§ 7, *observação*) Como o valor 10 que demos a x é arbitrário, segue-se que podemos atribuir a x uma infinidade de valores.

Atribuindo a x os valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... etc., e calculando os valores resultantes para y, podemos organizar o seguinte quadro:

valores de **x**	0	1	2	3	4	5	6	7	8	*etc..*
valores de **y**	−2	−0,5	1	2,5	4	5,5	7	8,5	10	*etc..*

(3)

A equação (1) tem, portanto, uma infinidade de soluções; x e y podem ser substituídos, respectivamente, por 4 e 4, 6 e 7,

8 e 10, etc.; a equação (1) se transformará sempre em uma identidade. Quanto ao problema proposto, porém, a sua natureza exige que as soluções da equação (1) sejam constituídas por números inteiros e positivos. Portanto, as soluções do problema são as seguintes:

número de meninas	2	4	6	8	10	12	*etc..*
número de meninos	1	4	7	10	13	16	*etc..*

Donde se conclue que o problema proposto é realmente indeterminado.

Observação. O problema proposto seria determinado *se contivesse mais uma condição,* por exemplo, *o número total de alunos da classe é* 38. Neste caso, teríamos de resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x + y = 38 \end{cases}$$

E acharíamos $x = 16$ e $y = 22$. (§9)

4. Uma função de x. Consideremos a seguinte equação:

$$y = \frac{3x - 4}{2} \qquad (1)$$

A letra x pode receber um valor qualquer, inteiro ou fracionário; positivo ou negativo, racional ou irracional; pode variar desde $-\infty$ até $+\infty$. Dá-se-lhe, por êste motivo, o nome de variável. A cada valor de x corresponde um valor para y; portanto, y é também uma *variável.* Mas há uma diferença essencial entre as variáveis x e y; x pode receber um valor qualquer, ao passo que o valor de y depende do valor de x, está subordinado ao valor de x. Portanto, x é uma *variável independente,* ao passo que y é uma *variável dependente,* ou uma *variável função.* (§ 2)

Na equação (1), x é uma variável independente e y é uma variável dependente ou variável função.

A variável dependente é também chamada função da variável independente. Na equação (1), y é uma *função* de x.

Da equação (1) deduzimos:

$$2y = 3x - 4 \quad \therefore \quad x = \frac{2y + 4}{3} \qquad (2)$$

Esta equação nos mostra que y, variável dependente, passou a ser variável independente, e x, variável independente, passou a ser variável dependente.

Considerando a equação $3x - 5y = 8$, e resolvendo-a em relação a x e y, teremos:

$$x = \frac{8 + 5y}{3} \qquad y = \frac{3x - 8}{5}$$

Na primeira equação, *x é uma função de y;* na segunda, *y é uma função de x.* Os números 3, 5 e 8 que figuram nestas duas equações, são chamados *constantes.* (§ 2)

Considerando a equação

$$ax + by = c$$

as letras a, b e c são *constantes arbitrárias* ou *parâmetros.* (§ 2)

5. Funções explícitas e implícitas. Consideremos as duas funções seguintes:

$$f(c, i, t, j) = 0 \qquad j = \frac{cit}{100}$$

A primeira nos diz que os *juros* dependem do *capital*, da *taxa* e do *tempo*, mas não nos diz em que consiste esta dependência; não nos mostra qual o caminho a seguir para calcular os *juros*, quando se conhecem o *capital*, a *taxa* e o *tempo;* dizemos, em Matemática, que esta função é *implícita* (do latim *implicare*, embrulhar).

A segunda nos diz que os *juros* dependem do *capital*, da *taxa* e do *tempo*, e ao mesmo tempo nos mostra qual o caminho a seguir para calcular os *juros*, quando se conhecem o *capital*, a *taxa* e o *tempo;* dizemos, em Matemática, que esta função é *explícita* (do latim *explicare*, desembrulhar).

Na verdade, se pedirmos a alguns estudantes que calculem os juros de Cr.\$400,00, a 5% ao ano, em 8 anos, e se lhes dissermos apenas que $f(c, i, t, j) = 0$ êles ficarão positivamente *embrulhados*; o único meio de *desembrulhá-los* será dizer-lhes que $j = \frac{cit}{100}$.

Uma equação da forma $3y - 2x = 4$ é uma *função implícita* das variáveis x e y. Resolvendo esta equação em relação a x ou a y, acharemos:

$$x = \frac{3y - 4}{2} \qquad y = \frac{2x + 4}{3}$$

e diremos que a função se tornou *explícita* em relação a x ou a y.

Exercícios em classe

1. De que depende a área de um quadrado? Representando a área de um quadrado por s e o lado por l, escrever a fórmula que liga estas duas variáveis. Qual é a variável independente? E a variável função? Há constantes nesta fórmula? E parâmetros? Tirar desta fórmula o valor de l, e dizer quais são, na fórmula resultante, as variáveis, as constantes absolutas e os parâmetros. Dar às fórmulas, a forma de função implícita.

2. Representando por s, c e l, a área, o comprimento e a largura de um retângulo, mostrar de modo implícito e depois explícito, a dependência que existe entre cada uma destas variáveis e as outras duas. Classificar as variáveis e as constantes.

3. Mesmo exercício em relação ao bloco retângular, representando o volume, o comprimento, a largura e a altura, pelas letras v, c, l e h.

4. Mesmo exercício em relação ao cubo, representando o volume e a aresta pelas letras v e a.

5. Mesmo exercício em relação ao cubo, representando a área total (superfície do cubo) e a aresta, pelas letras s e a.

6. Mesmo exercício em relação à circunferência, representando o comprimento desta linha e o raio pelas letras c e r.

7. Mesmo exercício em relação às variáveis c, i, t e j do problema dos juros.

8. Mesmo exercício em relação às variáveis e, v e t da equação do movimento uniforme. (E.M.S.V. § 26)

6. Gráfico de uma função de x. Consideremos a equação

$$3x - 2y = 4 \quad \therefore \quad y = \frac{3x - 4}{2}$$

Atribuindo a x valores arbitrários, e calculando os valores resultantes de y, teremos:

valores de x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	*etc..*
valores de y	−2	−0,5	1	2,5	4	5,5	7	8,5	10	*etc..*

(A)

Considerando os valores de x como *abcissas*, e os de y como *ordenadas* (§ 1) *construindo* os pontos (0, −2), (1, −0,5), (2, 1), (3, 2,5), etc., e ligando os pontos assim obtidos, isto é, os pontos A, B, C, D, etc., teremos a *reta* AF. (fig. 5)

Observação. Dizemos que AF é uma reta; entretanto, êste fato só pode ser demonstrado em Geometria Analítica.

Vejamos o que significa esta reta. *As coordenadas de um ponto qualquer desta reta*, por exemplo, as coordenadas do ponto D, *representam uma solução da equação* $3x - 2y = 4$. Entretanto, *as*

coordenadas de um ponto qualquer situado fora desta reta, por exemplo, as coordenadas do ponto M ou as do ponto N, *não representam uma solução da equação*

$$3x - 2y = 4.$$

Com efeito, as coordenadas do ponto M são 4,5 e 2, as do ponto N são 2,5 e 5, e é fácil verificar que êstes valores não convêm à equação $3x - 2y = 4$. Portanto.

A reta AF é o lugar onde estão situados todos os pontos cujas coordenadas satisfazem à equação

$$3x - 2y = 4$$

Fora desta reta não há pontos cujas coordenadas satisfaçam à equação

$$3x - 2y = 4$$

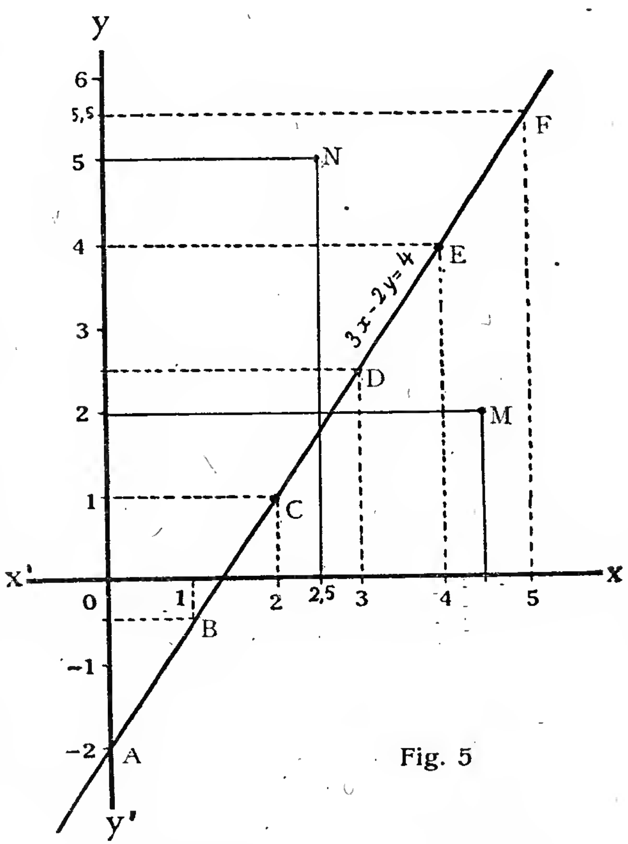


Fig. 5

Dá-se à reta AF o nome de *gráfico* da equação proposta, a qual, no nosso caso, é a equação $3x - 2y = 4$.

Se construirmos o gráfico de uma equação qualquer do primeiro grau com duas incógnitas, isto é, de uma equação da forma

$$ax + by = c$$

verificaremos que êste gráfico é, invariavelmente, uma reta. Eis por que estas equações são chamadas *equações lineares*.

Observação. Considerando o gráfico da equação $3x - 2y - 4 = 0$, é necessário compreender muito bem que:

I. Os valores de x são os segmentos situados no eixo dos x, tendo por origem o ponto O, e por extremidades os pontos 1, 2, 3, 4, etc..

II. Os valores de y, isto é, da função $\frac{3x-4}{2}$ são os segmentos situados no eixo dos y, tendo por origem o ponto O, e por extremidades os pontos 1, 2, 3, 4, 5, etc..

Exercício. *Construir o gráfico da equação* $5x - 3y = 15$. O gráfico desta equação é uma reta. Para construí-la, é bastante construir dois pontos da mesma. Com efeito, por dois pontos dados é sempre possível traçar uma reta, e sòmente uma. Portanto, para construir o gráfico da equação $5x - 3y = 15$, isto é, *a reta que contém todas as soluções desta equação, é bastante construir dois pontos desta reta.*

Para determinar êstes dois pontos toma-se a equação proposta e, fazendo-se $x = 0$, calcula-se o valor correspondente de y; depois fazendo-se $y = 0$, calcula-se o valor correspondente de x. Em outras palavras:

a) calcula-se a **ordenada** *do ponto cuja* **abcissa** *é* **zero.**

b) calcula-se a **abcissa** *do ponto cuja* **ordenada** *é* **zero.**

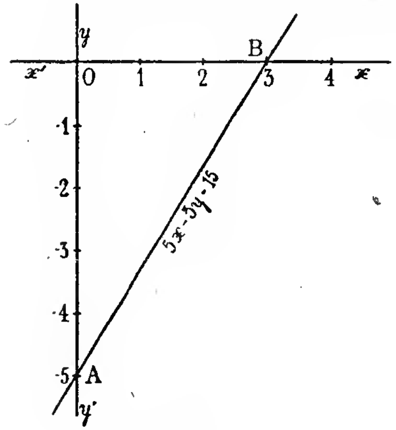


Fig. 6

$$\begin{aligned} 5x - 3y &= 15 \\ \text{Para } x &= 0, \text{ resulta:} \\ -3y &= 15 \\ y &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x - 3y &= 15 \\ \text{Para } y &= 0, \text{ resulta:} \\ 5x &= 15 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Seja A o ponto da reta cuja abcissa é zero; a ordenada será -5. Seja B o ponto da reta cuja ordenada é zero; a abcissa será 3. Conhecidos os pontos A $(0, -5)$, e B $(3, 0)$, liga-se o ponto A ao ponto B; a reta AB é o gráfico da equação $5x - 3y = 15$.

Observação. Os estudantes devem reproduzir êste gráfico, prolongar a reta AB nos dois sentidos e dar algumas soluções da equação $5x - 3y = 15$.

Exercícios. Série III

Observação. No eixo das abcissas, os segmentos 0|1, 1|2, 2|3, 3|4, etc., devem ser iguais; o mesmo acontece no eixo das ordenadas; entretanto, de acôrdo com as conveniências do desenho, os segmentos 0|1, 1|2, 2|3, 3|4, etc., do eixo das abcissas, podem ser diferentes dos mesmos segmentos do eixo das ordenadas.

1. Construir o gráfico da equação $x-y=0$.

Observação. Em relação a esta equação não é possível proceder como ficou indicado porque, para $x = 0$, resulta $y = 0$, e para $y = 0$ resulta $x = 0$. Êste processo nos daria sòmente um ponto (0, 0) isto é, o ponto cuja abcissa é zero e cuja ordenada é zero. Êste ponto é a origem das coordenadas, é o ponto de intersecção dos eixos cartesianos. Para obter um outro ponto qualquer da reta, dá-se a x um valor qualquer, por exemplo, 5; o valor correspondente de y será 5; será então suficiente construir o ponto (5, 5). E a reta que une a origem ao ponto (5, 5) é o gráfico da equação $x-y=0$.

2. Construir o gráfico da equação $x + y = 0$.
3. Construir o gráfico da equação $x - 2y = 0$.
4. Construir o gráfico da equação $2x + y = 0$.

Observação. Os gráficos das equações dadas nestes quatro exercícios, nos levam à conclusão seguinte:

Quando, na equação linear **ax+by = c,** *o valor de* **c** *é nulo, a reta que representa esta equação passa pela origem das coordenadas.*

E' útil observar também que as equações $x-y=0$ e $x+y=0$ são as equações das bissetrizes dos ângulos XOY e X'OY.

5. Construir o gráfico da equação $x = y + 2$.
6. Construir o gráfico da equação $y = 3 - x$.
7. Resolver gràficamente a equação $3y = 4x - 6$.
8. Construir o gráfico da equação $x = 3$.

Observação. Podemos dar a esta equação a forma $x+0y = 3$. Atribuindo a y um valor qualquer, teremos sempre $x = 3$. Portanto, para construir o gráfico da equação $x = 3$, é bastante construir dois pontos cuja abcissa seja 3 e cuja ordenada seja qualquer. Sejam A (3, 5) e B (3, −4) êstes dois pontos; a reta que passa pelos pontos A e B é o gráfico da equação $x = 3$.

Conclusão. O gráfico de uma equação da forma $ax = b$ é uma reta paralela ao eixo dos y, cuja distância a êste mesmo eixo é $\frac{b}{a}$.

Se a equação é da forma $ay = b$, seu gráfico é uma reta paralela ao eixo dos x, e cuja distância ao mesmo eixo é $\frac{b}{a}$.

9. Construir o gráfico da equação $2x = 3$.
10. Construir o gráfico da equação $y = 0$.
11. Construir o gráfico da equação $x = 0$.
12. Construir o gráfico da equação $0x + 0y = 0$.
13. Uma reta é paralela ao eixo dos x, e a distância de qualquer ponto desta reta ao mesmo eixo é 4. Qual é a equação desta reta?
14. Todos os pontos de uma reta AB têm a mesma abcissa, isto é, $3/5$. Qual é a equação desta reta?
15. Todos os pontos de uma reta AB têm a mesma ordenada, isto é, $7/4$. Qual é a equação desta reta?
16. A abcissa de um ponto qualquer de uma reta AB é constantemente igual a $5/3$ da ordenada dêste mesmo ponto. Qual é a equação desta reta?
17. E' dada a equação $2x-3y = 12$. Verificar gràficamente se as soluções (5, 3), (6, 0), (10, 2) e (9, 2) convêm a esta equação.

7. Equações simultâneas. Diz um pai a seu filho: *"O dôbro da minha idade mais o triplo da tua é igual a* **110**; *o triplo da minha idade menos o dôbro da tua é igual a* **100**. *Quais são as nossas idades?"*

Representando por x a idade do pai e por y, a do filho, e traduzindo em linguagem algébrica o enunciado do problema, teremos:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 110 \\ 3x - 2y & = & 100 \end{array}\right\} \qquad \text{I}$$

O problema proposto dá origem a duas equações, *as quais devem ter as mesmas raízes*, porque, nas duas equações, x e y representam, respectivamente, a idade do pai e a do filho.

Raiz de uma equação é o valor numérico ou literal que convém à incógnita. A primeira equação tem duas incógnitas, x e y; as raízes desta equação são os valores numéricos que convêm às incógnitas, isto é, *a idade do pai e a do filho.* A segunda equação também tem duas incógnitas, x e y; as raízes desta equação são os valores numéricos que convêm às incógnitas, isto é, *a idade do pai e a do filho.* Portanto, **as duas equações devem ter as mesmas raízes.**

Estas duas equações são *distintas* porque cada uma delas traduz uma relação diferente entre a idade do pai e a do fiiho; considerando, porém, que estas duas equações têm as mesmas raízes, dá-se-lhes o nome de *equações simultâneas.*

Equações simultâneas *são duas ou mais equações que, sendo distintas, devem admitir as mesmas raízes.*

Duas ou mais equações simultâneas formam um sistema.

Observação. Quando uma equação tem mais de uma incógnita, os conjuntos de valores das incógnitas, que verificam a equação dada, são chamados **soluções da equação.**

Por exemplo, a equação $x + y = 5$ tem, *em números naturais*, **quatro soluções,** a saber: $x = 1$ e $y = 4$, $x = 2$ e $y = 3$, $x = 3$ e $y = 2$, $x = 4$ e $y = 1$. E, *em números quaisquer, tem uma infinidade de soluções.*

Em se tratando de um sistema de duas equações simultâneas com duas incógnitas, daremos também o nome de *solução* do sistema ao conjunto dos valores das incógnitas que verificam ao mesmo tempo as duas equações.

Considerando o sistema I, multipliquemos ambos os membros da primeira equação por 3, e os da segunda por 2. Resultará:

$$\left\{\begin{aligned} 6x + 9y &= 330 \\ 6x - 4y &= 200 \end{aligned}\right\} \qquad \text{II}$$

Ora, as equações $2x + 3y = 110$ e $6x + 9y = 330$ são eqüivalentes assim como as equações

$$3x - 2y = 100 \quad \text{e} \quad 6x - 4y = 200$$

E diremos então que os sistemas I e II são *eqüivalentes.*

Dois sistemas são eqüivalentes *quando admitem as mesmas soluções.*

Consideremos as duas equações seguintes: $\left\{\begin{aligned} x + y &= 30 \\ x + y &= 60 \end{aligned}\right\}$

Não é possível, evidentemente, determinar dois números que satisfaçam ao mesmo tempo a estas duas equações; há uma infinidade de números (inteiros ou fracionários, positivos ou negativos) cuja soma é 30; assim como há tambem uma infinidade de números cuja soma é 60. Cada uma destas duas equações, isoladamente, tem uma infinidade de soluções; mas não é possível determinar dois números cuja soma seja igual, ao mesmo tempo, a 30 e a 60. *Estas duas equações formam um sistema de* **equações incompatíveis.**

8. Resolução de um sistema de duas equações simultâneas. Aprenderemos, em primeiro lugar, a resolver um sistema de duas equações simultâneas, com duas incógnitas, *e do primeiro grau*, isto é, x e y terão sempre, como expoente, a unidade.

Consideremos o seguinte sistema:

$$\left\{\begin{aligned} 2x + 3y &= 110 \\ 3x - 2y &= 100 \end{aligned}\right\} \qquad \text{I}$$

Para resolver êste sistema é necessário *eliminar*, isto é, fazer desaparecer uma das incógnitas.

Para eliminar uma incógnita existem, em Algebra, vários processos. Os mais simples são três, a saber:

I. *Eliminação por adição.*
II. *Eliminação por substituição.*
III. *Eliminação por comparação.*

9. Eliminação por adição. Seja o sistema

$$\left\{\begin{aligned} 2x + 3y &= 110 \\ 3x - 2y &= 100 \end{aligned}\right\} \qquad \text{I}$$

Seja y a incógnita que vamos eliminar, Multiplicando a primeira equação por 2, e a segunda por 3, o que é permitido, teremos:

$$\left\{\begin{aligned} 4x + 6y &= 220 \\ 9x - 6y &= 300 \end{aligned}\right\} \qquad \text{II}$$

Somando as duas equações resultantes, membro a membro, teremos:

$$13x = 520 \quad \therefore \quad x = 40$$

Conhecido o valor de x, tomando uma equação qualquer do sistema I ou II, e substituindo x pelo seu valor 40, teremos:

$$\begin{aligned} 2x+3y &= 110 \\ 2\times40+3y &= 110 \\ 80+3y &= 110 \\ 3y &= 110-80 \\ 3y &= 30 \\ y &= 10 \end{aligned}$$

Portanto, x é igual a 40 e y é igual a 10. E, lembrando que o sistema que acabámos de resolver provém do poblema com o qual iniciámos o parágrafo 7, ficamos sabendo que o pai tem 40 anos e o filho tem 10. E estas duas idades satisfazem às condições exigidas pelo problema, como é fácil verificar.

Voltando ao sistema I, isto é, ao sistema

$$\left\{\begin{aligned} 2x + 3y &= 110 \\ 3x - 2y &= 100 \end{aligned}\right\} \qquad \text{I}$$

vamos eliminar x. Multiplicando a primeira equação por 3 e a segunda por -2 (*menos* 2) teremos:

$$\left\{\begin{aligned} 6x + 9y &= 330 \\ -6x + 4y &= -200 \end{aligned}\right\} \qquad \text{II}$$

Somando as duas equações resultantes, membro a membro, teremos:

$$13y = 130 \quad \therefore \quad y = 10$$

Conhecido o valor de y, tomando uma equação qualquer do sistema I ou II, e substituindo y pelo seu valor 10, resulta:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 110 \\ 2x + 3 \times 10 &= 110 \\ 2x + 30 &= 110 \\ 2x &= 110-30 \\ 2x &= 80 \\ x &= 40 \end{aligned}$$

Portanto, x é igual a 40 e y é igual a 10.

As equações do problema inicial do parágrafo 7 foram resolvidas de dois modos diferentes; vamos comparar os dois trabalhos. Êste problema deu origem ao seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{aligned} 2x + 3y &= 110 \\ 3x - 2y &= 100 \end{aligned} \right\} \quad \text{I}$$

Vamos eliminar x. Multicando ambos os membros da primeira equação por 3, e os da segunda por -2, teremos:

$$\begin{aligned} 6x + 9y &= 330 \\ -6x + 4y &= -200 \end{aligned}$$

Somando as duas equações, resulta:

$$\begin{aligned} 13y &= 130 \\ y &= 10 \end{aligned}$$

Voltando à primeira equação do sistema I, teremos:

$$\begin{aligned} 2x + 3 \times 10 &= 110 \\ 2x + 30 &= 110 \\ 2x &= 110-30 \\ 2x &= 80 \\ x &= 40 \end{aligned}$$

Resposta. $\left\{ \begin{aligned} x &= 40 \\ y &= 10 \end{aligned} \right\}$

Vamos eliminar y. Multiplicando ambos os membros da primeira equação por 2, e os da segunda por 3, teremos:

$$\begin{aligned} 4x + 6y &= 220 \\ 9x - 6y &= 300 \end{aligned}$$

Somando as duas equações, resulta:

$$\begin{aligned} 13x &= 520 \\ x &= 40 \end{aligned}$$

Voltando à primeira equação do sistema I, teremos:

$$\begin{aligned} 2 \times 40 + 3y &= 110 \\ 80 + 3y &= 110 \\ 3y &= 110-80 \\ 3y &= 30 \\ y &= 10 \end{aligned}$$

Resposta. $\left\{ \begin{aligned} x &= 40 \\ y &= 10 \end{aligned} \right\}$

Do exposto resulta a seguinte

Regra. *Para resolver um sistema de duas equações simultâneas, do primeiro grau, com duas incógnitas, pelo método de eliminação por adição,*

a) Multiplicam-se ambos os membros de cada uma das equações por números tais que a incógnita que se quer eliminar tenha, nas duas equações, o mesmo coeficiente, mas com sinal contrário.

b) Somam-se as duas equações, resultando assim uma equação com uma incógnita.

c) Resolve-se esta equação.

d) Entra-se com a raiz obtida, numa das equações do sistema proposto e resolve-se esta equação, determinando-se assim a outra raiz e, conseqüentemente, a solução do sistema.

Aplicações

I. Resolver o sistema $\left\{ \begin{aligned} x + y &= 12 \\ 3x + y &= 24 \end{aligned} \right\}$

Multiplicando a segunda equação por -1 (portanto, trocando os sinais da segunda equação), teremos:

$$\left\{ \begin{aligned} x + y &= 12 \\ -3x - y &= -24 \end{aligned} \right\} \therefore$$

$$\begin{aligned} -2x &= -12 \\ 2x &= 12 \\ x &= 6 \\ x + y &= 12 \\ 6 + y &= 12 \\ y &= 6 \end{aligned} \qquad R. \left\{ \begin{aligned} x&=6 \\ y&=6 \end{aligned} \right\}$$

Para resolver êste sistema, pelo método de eliminação por adição, não devemos eliminar x, porque então seríamos obrigados a multiplicar a primeira equação por -3; é preferível eliminar y, porque y *tem o mesmo coeficiente nas duas equações.*

II. Resolver o sistema $\left\{ \begin{aligned} 5x + 6y &= 19 \\ 7x + 2y &= 1 \end{aligned} \right\}$

Multiplicando a segunda equação por -3, teremos:

$$\left\{ \begin{aligned} 5x + 6y &= 19 \\ -21x - 6y &= -3 \end{aligned} \right\} \therefore$$

$$\begin{aligned} -16x &= 16 \\ 16x &= -16 \\ x &= -1 \\ 5(-1)+6y &= 19 \\ -5+6y &= 19 \\ 6y &= 19+5 \\ 6y &= 24 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

E' indiferente eliminar y ou x. Entretanto, se quiséssemos eliminar x, seria necessário multiplicar a primeira equação por 7 e a segunda por -5; ao passo que, para eliminar y, é bastante multiplicar a segunda equação por -3.

Resposta. $\left\{ \begin{aligned} x &= -1 \\ y &= 4 \end{aligned} \right\}$

III. Resolver o sistema $\begin{cases} 4x + 11y = -63 \\ 6x - 5y = 13 \end{cases}$

Multiplicando a primeira equação por 3, e a segunda por -2, teremos:

$$\begin{cases} 12x + 33y = -189 \\ -12x + 10y = -26 \end{cases}$$
$$43y = -215$$
$$y = -5$$
$$6x - 5(-5) = 13$$
$$6x + 25 = 13$$
$$6x = 13 - 25$$
$$6x = -12$$
$$x = -2$$

Resposta. $\begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \end{cases}$

Neste sistema devemos eliminar x por ter coeficientes menores que y. Entretanto, para eliminar $\boldsymbol{x}$, não **é** necessário multiplicar a primeira equação por 6 e a segunda por -4; o m.m.c. dos coeficientes 4 e 6 é 12; $12 = 4 \times 3$ e $12 = 6 \times 2$. Portanto, é bastante multiplicar a primeira equação por 3 e a segunda por -2.

IV. Resolver o sistema $\begin{cases} 17x + 14y = 79 \\ 19x + 21y = 99 \end{cases}$

Multiplicando a primeira equação por 3, e a segunda por -2, teremos:

$$\begin{cases} 51x + 42y = 237 \\ -38x - 42y = -198 \end{cases}$$
$$13x = 39$$
$$x = 3, \text{ etc..}$$

Poderíamos eliminar x, multiplicando a primeira equação por 19 e a segunda por -17. Entretanto, é preferível eliminar y. Com efeito, o m.m.c. dos coeficientes 14 e 21 é 42; ora $42 = 14 \times 3$ e $42 = 21 \times 2$. Portanto, é bastante multiplicar a primeira equação por 3, e a segunda por -2.

10. Forma normal das equações. *A forma normal das equações do primeiro grau com uma incógnita é*

$$\boldsymbol{ax = b} \quad \text{(E.M.T.V. §75)}$$

A forma normal de uma equação do primeiro grau com duas incógnitas é

$$\boldsymbol{ax + by = c}$$

Nesta equação, x e y são as incógnitas; a, b e c são números quaisquer, são os coeficientes; c é um têrmo independente das incógnitas.

A forma normal de um sistema de duas equações simultâneas do primeiro grau com duas incógnitas é

$$\begin{cases} \boldsymbol{ax + by = c} \\ \boldsymbol{a'x + b'y = c'} \end{cases}$$

Neste sistema, x e y são as incógnitas; a, b e c, assim como a', b' e c' são números quaisquer, são os coeficientes; c e c' são têrmos independentes das incógnitas.

Antes de resolver um sistema de duas equações simultâneas com duas incógnitas, é necessário reduzí-lo à sua forma normal.

Aplicações

1. Resolver o sistema $\begin{cases} \dfrac{x-4}{3} + \dfrac{y}{2} = 0 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Eliminando os denominadores . . . . . . $\begin{cases} 2x - 8 + 3y = 0 \\ 2x = y \end{cases}$

Transpondo . . . . $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

Multiplicando a segunda equação por -1. $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ -2x + y = 0 \end{cases}$

Somando . . . . $4y = 8$, etc..

2. Resolver o sistema $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2} + \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{5}{4} \\ \dfrac{x-5}{6} - \dfrac{y-3}{18} = 1 \end{cases}$

Eliminando os denominadores. . . $\begin{cases} 2x + 2 + y + 3 = 5 \\ 3x - 15 - y + 3 = 18 \end{cases}$

Transpondo . . . . $\begin{cases} 2x + y = 5 - 3 - 2 \\ 3x - y = 18 + 15 - 3 \end{cases}$

Reduzindo . . . . $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x - y = 30 \end{cases}$

Somando . . . . $5x = 30$, etc..

Exercícios. Série IV (*)

Resolver, pelo método de eliminação por adição, os seguintes sistemas:

1. $\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 3x + y &= 4 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} x + y &= 32 \\ x - y &= 10 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} x + 2y &= 27 \\ x - y &= -3 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 2r + 3s &= 13 \\ r + 2s &= 8 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} 5t + 3u &= 14 \\ 3t - 5u &= 22 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 5m - 4n &= 7 \\ 2m + 3n &= 12 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 3x + 5y &= 14 \\ 6x - 3y &= 15 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} a + 5b &= 12 \\ 3a - 4b &= -2 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} 2x + 3y &= 41 \\ 2y + 3x &= 39 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} 2x + 5y &= 17 \\ 9x - 2y &= 3 \end{aligned}$

11. $\begin{aligned} 5x + 4y &= 58 \\ 3x + 7y &= 67 \end{aligned}$

12. $\begin{aligned} 12x + 7y &= 176 \\ 3y - 19x &= 3 \end{aligned}$

13. $\dfrac{2}{x+3} = \dfrac{3}{y-2}$

$5(x+3) = 3(y-2) + 2$

14. $\dfrac{3x+12y}{11} = 9$

$\dfrac{1-3x}{7} = \dfrac{11-3y}{5}$

N. B. Se uma equação se apresenta em forma de proporção, eliminam-se os denominadores aplicando-lhe o teorema fundamental das proporções.

15. $\dfrac{x}{8} = \dfrac{y}{9}$

$5x - 3y = 13$

16. $\dfrac{x+2y}{3} + \dfrac{2y-3}{3} = 2$

$\dfrac{x}{3} + \dfrac{x+y}{3} = \dfrac{4}{3}$

17. $\dfrac{2x-y}{2} + \dfrac{x-2y}{2} = 12$

$\dfrac{x-3y}{2} - 3x - 2y = -32$

18. $\dfrac{x+y}{7} + \dfrac{x-y}{6} = \dfrac{46}{3}$

$\dfrac{x-7y}{8} - \dfrac{x-6y}{14} = 0$

19. $\dfrac{x+1}{2} + \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{5}{4}$

$\dfrac{x-5}{6} - \dfrac{y-3}{18} = 1$

20. $2x + \dfrac{5y+3}{3} = 15$

$9y - \dfrac{3x-1}{2} = -10$

21. $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = \dfrac{1}{6}$

$\dfrac{x-2}{5} - \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{1}{2}$

22. $\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{25}{6} - \dfrac{x+y}{3}$

$\dfrac{x+y-9}{2} + \dfrac{x-y+6}{3} = 0$

23. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3}$

$6x = 6(y-4)$

24. $12x = 7y + 39$

$\dfrac{x+y}{4} = 3 - \dfrac{x-y}{2}$

(*) Convém ler a Nota da pág. 271.

Problemas. Série V

Os problemas que se seguem deverão ser resolvidos com duas incógnitas.

1. Determinar dois números consecutivos tendo por soma 83.

2. Determinar dois números tendo por soma 147 e por diferença 53.

3. A soma de dois números é 222 e o quociente é 5. Quais são os dois números?

4. A soma de dois números é 141, o quociente incompleto é 6 e o resto da divisão do maior pelo menor é 15. Quais são os dois números?

5. A diferença de dois números é 450 e o quociente é 7. Quais são os dois números?

6. A diferença de dois números é 182, o quociente incompleto é 4 e o resto da divisão do maior pelo menor é 26. Quais são os dois números?

7. Calcular o comprimento e a largura de um retângulo cujo perímetro mede 208m, sendo a largura igual a $5/8$ do comprimento.

8. Um número é o quíntuplo do outro; diminuindo 80 unidades do maior, e 8 do menor, os restos são iguais. Quais são os dois números?

9. Pai e filho têm juntos 96 anos, e a idade do pai é o quádruplo da do filho. Qual é a idade de cada um?

10. Dividir 90 em duas partes tais que 4 vêzes uma seja igual a 5 vêzes a outra.

11. Dividir o número 126 em duas partes tais que uma seja o dôbro da outra.

12. Dividir 40 em duas partes tais que cinco vêzes a primeira mais três vêzes a segunda seja igual a 184.

13. Dividir 50 laranjas em duas porções tais que a diferença entre o triplo da primeira e o quádruplo da segunda seja 38.

14. Tenho Cr.$255,00 em notas de Cr.$20,00 e de Cr.$5,00. O número total delas é 30. Quantas são as notas de Cr.$20,00 e as de Cr.$5,00?

15. Dividir 120 em duas partes tais que 10 vêzes a maior seja igual a 14 vêzes a menor.

16. Comprei 30 sacas de café, tipos 3 e 4, e paguei Cr.$4.140,00. O tipo 3 custou Cr.$150,00 a saca e o tipo 4, Cr.$120,00. Quantas sacas de cada tipo comprei?

17. Comprei 30m de sêda e 40m de fôrro por Cr.$1 280,00. Sendo o preço de um metro de sêda igual a 4 vêzes o preço de um metro de fôrro, pergunta-se qual o preço do metro de cada fazenda.

18. Um empregado ganha Cr.$15,00 por dia, mas é obrigado a pagar uma multa de Cr.$4,00 quando não comparece ao escritório. Ao cabo de 60 dias recebe Cr.$729,00. Quantos dias trabalhou?

19. A diferença entre dois números é 4; a diferença entre o quíntuplo do menor e o triplo do maior é 10. Quais são os dois números?

20. Um negociante tem duas qualidades de vinho; uma custa Cr.$2,00 o litro e a outra, Cr.$3,60. Quer fazer uma mistura de 80 litros, e de modo que cada litro da mistura custe Cr.$3,20. Quantos litros de cada vinho deve misturar?

21. Dividir o número 60 em duas partes tais que um sétimo de uma seja igual a um oitavo da outra.

22. Repartir 55 laranjas em duas porções tais que um quarto da primeira, mais cinco sextos da segunda seja igual a 40.

23. Tenho galinhas e coelhos, ao todo 77 cabeças e 238 pés. Quantas são as galinhas e quantos os coelhos?

24. Um pai tem 30 anos mais que seu filho; dentro de 4 anos, a idade do pai será o quádruplo da do filho. Qual é a idade de cada um?

25. Qual é a fração cuja soma dos têrmos é 221, e que é igual a $5/8$?

26. Determinar uma fração que seja igual a $4/9$, e cuja soma dos têrmos seja 169.

27. A soma dos têrmos de uma fração é 300; determinar esta fração, sabendo que ela é igual a $4/11$.

28. Somando 25 ao numerador de uma fração, ela se torna igual a 3; somando 5 ao denominador, ela se torna igual a $1/2$. Qual é a fração?

29. Somando 7 ao numerador de uma fração, ela se torna igual a 2; subtraindo 1 do denominador, ela se torna igual a 1. Qual é a fração?

30. A soma de duas frações cujos numeradores são 3 e 7, é $13/8$; trocando, porém, os denominadores, a soma é $17/8$. Quais são as duas frações?

31. Somando 5 ao numerador de uma fração, ela se torna igual a 1; dividindo a fração por 5 e subtraindo 10 do denominador, ela se torna igual a 0,1. Qual é a fração?

32. Há oito anos a idade de um pai era 5 vêzes a do filho; dentro de 2 anos, a idade do pai será o dôbro da do filho. Calcular a idade do pai e a do filho.

33. A soma das idades de um pai e seu filho é a metade do que será dentro de 25 anos; a diferença é um têrço do que a soma será dentro de 20 anos. Qual é a idade de cada um?

34. Dois números são tais que, dividindo o maior pelo menor, o quociente é 2,14 e o resto é 0,02; dividindo o menor pelo maior, o quociente é 0,46 e o resto é 0,0376. Quais são os dois números?

35. Dados dois números, o quociente incompleto da divisão do maior pelo menor é 1 e o resto é 2; o quociente incompleto da divisão do menor pelo maior é 0,8 e o resto é 1. Quais são os dois números?

36. Dados dois números, o quociente exato da divisão do menor pelo maior é $5/23$; mas, dividindo-se o maior pelo menor, o quociente incompleto é 4 e o resto é 21. Quais são os dois números?

37. A tem o triplo do dinheiro de B. Se B ganhar Cr.\$5,00 e A gastar Cr.\$15,00, B terá o dôbro do dinheiro de A. Quanto tem cada um dêles?

38. Ponho Cr.\$2 500,00 a juros, uma parte a 6%, e a outra a 5% e, ao cabo de um ano, ganho Cr.\$141,00. Determinar as duas partes.

39. Separei Cr.\$5 000,00 em duas parcelas e emprestei-as, a primeira a 7% ao ano e a segunda a $3\frac{1}{2}$%. A diferença entre os juros anuais da primeira parcela e os da segunda é Cr.\$140,00. Determinar as duas parcelas.

40. Um número tem dois algarismos, cuja soma é 11. Se somarmos 45 a êste número, o resultado será êste mesmo número escrito em ordem inversa. Qual é êste número?

41. Um número tem dois algarismos cuja soma é 13. Subtraindo 45 dêste número, resulta o mesmo número escrito em ordem inversa. Qual é êste número?

42. A soma dos dois algarismos de um número é 9. Se dividirmos o número pela soma dos seus algarismos, o quociente será 8. Qual é o número?

43. Um número tem dois algarismos, sendo que o algarismo das dezenas é o maior. Se o dividirmos pela soma dos algarismos, o quociente aproximado será 7 e o resto, 9; se invertermos a ordem dos algarismos dêste número, se lhe diminuirmos 6, e dividirmos o resto pela diferença dos dois algarismos, o quociente aproximado será 5 e o resto, 3. Qual é o número?

44. A minha idade é um número de dois algarismos, cuja diferença é 5. Invertendo os dois algarismos, o número resultante será a idade de meu neto. Determinar a minha idade e a de meu neto, sabendo que elas são proporcionais aos números 3 e 8.

45. Dividindo um número de dois algarismos pela soma dos mesmos, o quociente aproximado é 8 e o reto é 4; mudando a posição dos algarismos, e dividindo o número resultante pela soma dos seus algarismos, o quociente aproximado é 2 e o resto é 7. Qual é o número?

46. Mandei comprar maçãs a Cr.\$0,80 e peras a Cr.\$1,20, num total de Cr.\$15,60. Quando o meu empregado voltou, devolveu-me Cr.\$1,20, dizendo-me que cada maçã estava custando mais Cr.\$0,10, e cada pêra, menos Cr.\$0,20. Quantas maçãs e quantas peras mandei comprar?

47. Dividir um segmento AB, com 7,02m em dois segmentos proporcionais aos números 5 e 8.

48. Dividir o número 1 540 em duas partes proporcionais aos números $2/3$ e $4/5$.

49. Dois irmãos receberam Cr.\$13 800,00, em duas partes desiguais. O primeiro gastou $2/5$ da sua parte, o segundo gastou $3/7$ da sua, e verificaram que o resto do primeiro era igual ao dôbro do resto do segundo. Quanto tinha recebido cada um?

50. Um certo capital, rendendo juros simples, eleva-se a Cr.\$26 000,00 em 6 anos, e a Cr.\$30 000,00 em 10 anos. Calcular êste capital e a taxa.

11. Eliminação por substituição. Consideremos o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} 7x + 5y = 60 \\ 13x - 11y = 10 \end{array} \right\} \qquad \text{I}$$

Considerando a primeira equação do sistema como uma equação literal cuja incógnita é y, teremos:

$$5y = 60 - 7x \quad \therefore \quad y = \frac{60-7x}{5}$$

Entrando com êste valor de y, na segunda equação do sistema I, teremos:

$$\begin{aligned}
13x - \frac{11(60-7x)}{5} &= 10 \\
65x - 11(60-7x) &= 50 \\
65x - 660 + 77x &= 50 \\
65x + 77x &= 50 + 660 \\
142x &= 710 \\
x &= 5 \\
7x + 5y &= 60 \\
7 \times 5 + 5y &= 60 \\
5y &= 60 - 35 \\
5y &= 25 \\
y &= 5
\end{aligned}$$

Resposta. $\left\{ \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 5 \end{array} \right\}$

Obtido o valor de x, é fácil calcular y, recorrendo a uma das equações do sistema I. Vejamos agora o que fizemos para resolver êste sistema.

Em primeiro lugar, escolhemos a incógnita que queríamos eliminar ou *exterminar*, como dizia Newton. E escolhemos y, *por ter menor coeficiente do que* x. Depois, tirámos o valor de y, da primeira equação, isto é, *resolvemos a primeira equação, em relação a* $\boldsymbol{y}$*;* poderíamos, tirá-lo da segunda, mas é preferível tirá-lo da primeira, porque *nesta o coeficiente de* $\boldsymbol{y}$ *é menor do que na segunda*. Tendo tirado o valor de y, *da primeira equação, entrámos com êle na segunda*. (Se tivéssemos tirado o valor de y, *da segunda equação, deveríamos entrar com êle na primeira*.) Chegámos assim a uma equação do primeiro grau, com uma incógnita, x. Resolvemos esta equação, obtivemos o valor de x e, finalmente, uma das equações do sistema I nos deu o valor de y.

Vimos que o valor de y, tirado da primeira equação é

$$y = \frac{60 - 7x}{5} \qquad \text{(A)}$$

Dá-se a esta equação o nome de *equação resolvida em relação a* y. Obtido o valor de x, não é costume tirar o valor de y, de uma das equações do sistema I; recorre-se imediatamente *à equação resolvida em relação a* y, isto é, à equação A. Sendo $x = 5$, teremos:

$$y = \frac{60 - 7 \times 5}{5} \;\therefore\; y = \frac{60 - 35}{5} \;\therefore\; y = \frac{25}{5} \;\therefore\; y = 5$$

O método de eliminação que acabámos de expor é chamado *método de eliminação por substituição* e pode ser resumido na seguinte

Regra. *Para resolver um sistema de duas equações simultâneas, com duas incógnitas, pelo método de eliminação por substituição,*

a) Resolve-se uma das equações, em relação à incógnita que se quer eliminar.

b) **Substitue-se na outra equação** *a incógnita que se quer eliminar, pelo seu valor tirado da primeira.*

c) Resolve-se a equação resultante desta substituição.

d) Entra-se com a raiz obtida, na equação resolvida em relação à incógnita que se eliminou, e obtém-se assim o valor desta incógnita e, conseqüentemente, a solução do sistema.

Exercícios orais

Tirar o valor de x, e depois o de y, de cada uma das equações seguintes:

1. $2x + 3y = 7$	7. $4x - 7 = 3y$	13. $7 = 2x - 3y$
2. $5x - 4y = 10$	8. $x - 8 = 5y$	14. $0 = 5x + 2y$
3. $x + 5y = 13$	9. $4y + 9 = 1$	15. $1 = x - y$
4. $x - 3y = 8$	10. $2x - 9 = 3y$	16. $3 = 2x + y$
5. $4x + y = 9$	11. $5y - 2 = 7x$	17. $4 = 3x - y$
6. $3x - y = 5$	12. $x - 2y = 0$	18. $5 = 2y - x$

Observação. Êste exercício oral é indispensável, e deve ser feito com rapidez pelos estudantes. Certos defeitos devem ser evitados. Pergunte-se a um estudante qual é o valor de y, tirado da equação $4x - 3y = 10$; é quasi certo êle embaraçar-se com o sinal. Precisamos mostrar-lhe que, para responder à nossa pergunta, êle deve fazer mentalmente as seguintes operações:

$$4x - 3y = 10 \;\therefore\; 4x - 10 = 3y \;\therefore\; y = \frac{4x - 10}{3}$$

Exercícios. Série VI (*)

Resolver, pelo método de eliminação por substituição, os seguintes sistemas:

1. $9y - 7x = 13$; $15x - 7y = 9$
2. $21y + 20x = 165$; $77y - 30x = 295$
3. $x = 7$; $3x - y = 10$
4. $x - y = 3$; $x + 5y = 12$
5. $4x + 11y = -63$; $6x - 5y = 13$
6. $2x - 5y = -1$; $7x + 8y = 22$
7. $2x - 3y = -14$; $3x + 7y = 48$
8. $24m + 7n = 27$; $8m - 33n = 115$
9. $5y + 3x = 37$; $9x + 15y = 111$
10. $y - x = 2$; $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{5}$
11. $\dfrac{x}{3} - 2 = 5 - x - \dfrac{y}{30}$; $\dfrac{x}{4} - 3 = 2 - y + \dfrac{5x}{4}$
12. $\dfrac{x+y}{y-x} = \dfrac{15}{8}$; $9x - \dfrac{3y+44}{7} = 100$
13. $2x - \dfrac{y+2x}{7} = 54$; $\dfrac{2y-x}{7} - 7 = 0$

(*) Convém ler a Nota da pág. 271.

14. $$\begin{cases} \dfrac{2x+6}{5} + \dfrac{y+4}{5} = 3 \\[2mm] \dfrac{7x+1}{3} - \dfrac{11y-4}{7} = 4 \end{cases}$$

15. $$\begin{cases} \dfrac{3x-y}{2} + \dfrac{x+y}{3} = 4 \\[2mm] \dfrac{3x+y}{11} - \dfrac{3x-y}{3} = -2 \end{cases}$$

16. $$\begin{cases} \dfrac{6x-8y}{3} - \dfrac{8x-20y}{11} = 0 \\[2mm] x + y = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

17. $$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} - 8 = \dfrac{x-y}{3} \\[2mm] \dfrac{x-y}{4} + \dfrac{x+y}{3} = 11 \end{cases}$$

18. $$\begin{cases} \dfrac{x+y}{3} - \dfrac{x+y}{2} = -5 \\[2mm] \dfrac{2x+3y}{7} + \dfrac{x+y}{5} = 10 \end{cases}$$

19. $$\begin{cases} \dfrac{x-18}{15} - 4y = 6 \\[2mm] \dfrac{x+14}{2} - \dfrac{3y+10}{4} = 0 \end{cases}$$

20. $$\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{16-x}{2} = \dfrac{5y+2x}{40-x} + \dfrac{25}{4} \\[2mm] \dfrac{4(x-6)}{y+8} + \dfrac{84-8y}{8} = y - 5 \end{cases}$$

Problemas. Série VII

Os problemas que se seguem deverão ser resolvidos com duas incógnitas.

1. A e B trabalham na mesma fábrica. Ao cabo de um mês de trabalho, com 25 dias úteis, recebem seus salários. Tendo B faltado 3 dias ao serviço, ambos receberam Cr.$498,00. No mês seguinte, também com 25 dias úteis, tendo A faltado 3 dias ao trabalho, ambos receberam Cr.$489,00. Quanto ganha por dia cada um dêstes operários?

2. Um navio desce o rio Paraná com a velocidade de 36,8km a hora; sobe o mesmo rio com a velocidade de 27,4km. Qual seria a velocidade do navio, se não existisse a velocidade das águas do rio?

3. Tenho duas qualidades de vinho; 5 litros da primeira mais 8 litros da segunda valem Cr.$60,80, e 7 litros da primeira mais 12 litros da segunda valem Cr.$89,60. Quanto custa um litro da primeira qualidade e um litro da segunda?

4. Quero dar esmola a alguns pobres. Dando Cr.$1,00 a cada um, sobram-me Cr.$1,50. Entretanto, não posso dar Cr.$1,50 a cada um porque me faltam Cr.$4,00. Quanto dinheiro tenho e quantos são os pobres?
Sugestão. Tenho x e os pobres são y.

5. Um número é formado de dois algarismos cuja soma é 9. Invertendo a ordem dêstes algarismos, o número resultante tem 27 unidades mais que o triplo do número primitivo. Determinar êste número.

6. Eu divido um número de dois algarismos pela soma dêstes algarismos diminuída de 3; o quociente é 7 e restam 3. Eu inverto a ordem dos dois algarismos e divido êste novo número pela soma de seus algarismos aumentada de 2; o quociente é 4 e restam 10. Qual é o número?

7. Um negociante tem vinho de Cr.$5,00 e de Cr.$8,60. Quer preparar uma mistura de 80 litros, para vendê-la a Cr.$7,50. Quantos litros de cada qualidade deve misturar?

8. Tenho vinho de Cr.$7,20 e de Cr.$4,00. Quantos litros de cada qualidade devo misturar para poder vender 60 litros de vinho a Cr.$6,00 o litro?

9. Tenho chá de Cr.$4,60 o quilo e Cr.$7,00 o quilo. Quantos quilos de cada qualidade devo misturar para poder vender 40 quilos da mistura a Cr.$6,10?

10. Determinar dois números tais que a diferença entre o primeiro e o dôbro do segundo seja 6, e o dôbro do primeiro, menos 7, seja igual ao quádruplo do segundo aumentado de 5.

11. Quais são os números que se devem acrescentar aos têrmos da fração $3/4$, sem que o valor desta fração se altere? A soma dos dois números pedidos é 343.

12. Um negociante vendeu galinhas e perús, ao todo 40 aves. Vendeu as galinhas a Cr.$4,50 cada uma, os perús a Cr.$12,60 cada um, e recebeu por tudo Cr.$398,70. Quantas eram as galinhas e quantos os perús?

13. Um negociante vendeu galinhas e frangos, ao todo 36 aves. Vendeu as galinhas a Cr.$7,00 cada uma, e os frangos a Cr.$5,00, e verificou que o dinheiro recebido pelas galinhas era igual ao dinheiro recebido pelos frangos. Quantas eram as galinhas e quantos os frangos?

14. Distribuí um pacote de balas por alguns meninos e cada um recebeu 12 balas. Mas o mais velho desistiu da sua parte e então cada menino recebeu 15 balas. Quantas eram as balas e quantos eram os meninos?

15. Um empregado trabalhou em duas casas comerciais durante 45 dias, ganhando Cr.$5,25 por dia na primeira e Cr.$6,20 por dia na segunda. Recebeu ao todo Cr.$252,40. Quantos dias trabalhou em cada casa?

16. Comprei 6kg de café e 4kg de chocolate por Cr.$54,00. Entretanto, se eu tivesse comprado menos 1kg de café e mais 1kg de chocolate, teria pago Cr.$4,00 menos. Quanto custou o quilo de café e o de chocolate?

17. Dois estudantes mediram o comprimento de uma rua, contando os passos dados. O passo do primeiro tem 0,77m e o do segundo 0,80m. O primeiro deu 12 passos mais que o segundo. Qual é o comprimento da rua?

18. Um professor deu 20 problemas a um aluno, e prometeu dar Cr.$5,00 por cada problema que o aluno acertasse; êste, porém, ficaria obrigado a pagar ao professor Cr.$2,00 por cada problema não resolvido. Terminado o trabalho, verificou-se que o professor devia Cr.$79,00 ao aluno. Quantos problemas acertou êste? Quantos errou?

19. Pedí ao meu amigo Cristovão que me desse $2/3$ do seu dinheiro; eu ficaria então com Cr.$700,00. Mas o Cristovão não concordou comigo e pediu-me que eu lhe desse $1/3$ do meu dinheiro, porque assim êle ficaria também com Cr.$700,00. Quanto dinheiro tinha cada um de nós?

20. Somando 9 a ambos os têrmos de uma fração, ela fica igual a $20/21$; diminuindo 7 de ambos os têrmos, ela fica igual a $4/5$. Qual é a fração?

21. Somando 9 ao numerador de uma fração e diminuindo 9 do denominador da mesma, ela se torna igual a 8; diminuindo 7 do numerador e somando 7 ao denominador, ela se torna igual a $8/10$. Qual é a fração?

22. O quociente aproximado da divisão de dois números é 2 e restam 6; dividindo o décuplo do segundo pelo primeiro, o quociente aproximado é 4 e restam 18. Quais são os dois números?

23. Dois operários trabalharam 17 dias e 24 dias e receberam juntos Cr.\$512,00. Quanto ganha cada um dêles por dia, sabendo que o dinheiro que o primeiro recebe por 5 dias de trabalho é igual ao dinheiro que o outro recebe por 8 dias de trabalho?

24. Tendo Cr.\$15 000,00, coloquei parte dêste dinheiro a 6% ao ano, e o resto a 5%. Recebí, no fim do ano, Cr.\$810,00 de juros. Calcular os dois capitais.

25. Entrando em combate, os efetivos de dois exércitos eram proporcionais aos números 5 e 6. Morreram 1 400 homens do primeiro exército, 6 000 do segundo, e os efetivos ficaram proporcionais aos números 3 e 2. De quantos soldados se compunha cada exército?

12. Eliminação por comparação. Consideremos o seguinte sistema:

$$\left\{\begin{aligned} 3y - 7x &= 4 \\ 2y + 5x &= 22 \end{aligned}\right\} \qquad \text{I}$$

Considerando as duas equações do sistema como equações literais nas quais a incógnita é y, e resolvendo as duas em relação a y, teremos:

$$y = \frac{4+7x}{3} \qquad \text{(A)}$$

$$y = \frac{22-5x}{2} \qquad \text{(B)}$$

Comparemos êstes dois valores de y; são iguais porque as equações do sistema I são simultâneas. Neste caso, podemos escrever:

$$\frac{4+7x}{3} = \frac{22-5x}{2}$$
$$8+14x = 66-15x$$
$$14x+15x = 66-8$$
$$29x = 58$$
$$x = 2$$
$$y = \frac{4+7x}{3}$$
$$y = \frac{4+7\times 2}{3}$$
$$y = \frac{4+14}{3}$$
$$y = 6 \qquad R. \begin{cases} x=2 \\ y=6 \end{cases}$$

A incógnita y foi eliminada pela *comparação dos dois valores de* **y**, *tirados* respectivamente das duas equações do sistema I. Igualando os dois valores de y, formámos uma equação cuja incógnita é x. Resolvemos esta equação para determinar o valor de x. Conhecido o valor de x, entrámos com êle numa das *equações resolvidas em relação a* **y**, isto é, na equação A. E a equação A nos deu o valor de y.

O método de eliminação que expusemos neste parágrafo é chamado *método de eliminação por comparação* e pode ser resumido na seguinte

Regra. *Para resolver um sistema de duas equações simultâneas, com duas incógnitas, pelo método de eliminação por comparação,*

a) *Resolvem-se as duas equações, em relação à incógnita que se quer eliminar.*

b) *Igualam-se os dois valores desta* ***incógnita*** *e resolve-se a equação resultante.*

c) *Entra-se com a raiz obtida numa das equações resolvidas em relação à incógnita que se eliminou, e obtém-se, assim, o valor desta incógnita e, conseqüentemente, a solução do sistema.*

Exercícios. Série VIII

Resolver, pelo método de eliminação por comparação, os seguintes sistemas:

1. $2x + 3y = 43$; $10x - y = 7$

2. $x + 2y = 5$; $3x - 4y = 5$

3. $x = 3y - 19$; $y = 3x - 23$

4. $3x - 4y = 14$; $3y - 4x = -14$

5. $6m + 8n = 26$; $5m - 3n = 70$

6. $4x + 3y = 5$; $9y - 8x = 0$

7. $\dfrac{x}{6} - \dfrac{y}{4} = 1$; $\dfrac{4+5x}{11} - \dfrac{3-2y}{5} + 4 = 0$

8. $\dfrac{x-2}{5} - \dfrac{y-10}{4} = \dfrac{10-x}{3}$; $\dfrac{y+2}{3} - \dfrac{2x+y}{16} = \dfrac{x+13}{8}$

9. $\dfrac{3x-5y}{2} + 3 = \dfrac{2x+y}{5}$; $8 - \dfrac{x-2y}{4} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3}$

10. $\dfrac{x+y}{3} - \dfrac{x-y}{2} = 5$; $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x+y}{9} = 7$

11. $\dfrac{x+2}{7} + 8 - 2x = \dfrac{x-y}{4}$; $2y - \dfrac{3x-2y}{3} = 3x + 4$

12. $2x - 5y = -1$; $\dfrac{x-y}{7} - \dfrac{3x+2y}{23} = -1$

13. Equações simultâneas fracionárias. *Equação fracionária é aquela que contém incógnitas em denominador.* Em geral, quando as incógnitas estão nos denominadores, nem sempre podemos eliminar êstes, porque a sua eliminação traz dificuldades que, por enquanto, convém evitar.

Consideremos alguns casos simples, como, por exemplo, o sistema ao lado.

$$\left\{\begin{aligned} \frac{4}{x-1} &= \frac{3}{1-y} \\ \frac{5}{2y-5} &= \frac{7}{2x-39} \end{aligned}\right\}$$

Este sistema não oferece dificuldade; as duas equações têm a forma de uma proporção e, aplicando-lhes o teorema fundamental das proporções, teremos:

$$\begin{cases} 4(1-y) = 3(x-1) \\ 5(2x-39) = 7(2y-5) \end{cases}$$

Desaparecem os denominadores e o sistema se resolve facilmente por qualquer um dos três métodos ja indicados.

Consideremos agora o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x} + \dfrac{7}{y} = -\dfrac{3}{2} \\[2mm] \dfrac{7}{x} - \dfrac{6}{y} = \dfrac{16}{3} \end{cases} \quad \text{(A)}$$

Eliminando os denominadores, teremos:

$$\begin{cases} 12y + 14x = -3xy \\ 21y - 18x = 16xy \end{cases}$$

Estas equações são do segundo grau, cujo processo de resolução ainda não foi abordado. Portanto, não podemos eliminar os denominadores das equações do sistema A.

Para resolver o sistema A, e outros da mesma forma, *sem eliminar os denominadores*, recorreremos a um método muito simples e elegante, ao qual podemos denominar *método das incógnitas auxiliares*. E' o que vamos aplicar aos exemplos que se seguem.

Primeiro exemplo. Resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6} \\[2mm] \dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{y} = \dfrac{23}{6} \end{cases} \quad \text{(B)}$$

Isolando, neste sistema, as frações $\dfrac{1}{x}$ e $\dfrac{1}{y}$, teremos:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6} \\[2mm] 5 \times \dfrac{1}{x} + 4 \times \dfrac{1}{y} = \dfrac{23}{6} \end{cases} \quad \text{(C)}$$

Para resolver o sistema C, recorremos ao seguinte artifício de cálculo: fazemos

$$\frac{1}{x} = t \qquad \frac{1}{y} = u \qquad \text{(D)}$$

Voltando ao sistema C, e substituindo $\dfrac{1}{x}$ por t e $\dfrac{1}{y}$ por u, teremos:

$$\begin{cases} t + u = \dfrac{5}{6} \\[2mm] 5t + 4u = \dfrac{23}{6} \end{cases} \quad \text{(E)}$$

Resolvendo o sistema E, por qualquer dos três métodos já aprendidos, acharemos:

$$t = \frac{1}{2} \qquad u = \frac{1}{3}$$

Finalmente, voltando às equações D, teremos:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = t \\[2mm] \dfrac{1}{y} = u \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2} \\[2mm] \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \quad \therefore \quad \textit{Resposta.} \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Observação. Quando dois números são iguais, seus recíprocos também o são. Sendo $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$, o recíproco de $\dfrac{1}{x}$, isto é, x, será igual ao recíproco de $\dfrac{1}{2}$, isto é, 2.

Segundo exemplo: Resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x} - \dfrac{6}{y} = \dfrac{4}{5} \\[2mm] \dfrac{3}{2x} + \dfrac{7}{4y} = \dfrac{11}{10} \end{cases}$$

Isolando as frações $\dfrac{1}{x}$ e $\dfrac{1}{y}$, teremos:

$$\begin{cases} 4 \times \dfrac{1}{x} - 6 \times \dfrac{1}{y} = \dfrac{4}{5} \\[2mm] \dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{x} + \dfrac{7}{4} \times \dfrac{1}{y} = \dfrac{11}{10} \end{cases}$$

Fazendo $\frac{1}{x} = t$ e $\frac{1}{y} = u$, teremos: $\begin{cases} 4t - 6u = \frac{4}{5} \\ \frac{3t}{2} + \frac{7u}{4} = \frac{11}{10} \end{cases}$

Resolvendo êste sistema, acharemos $t = \frac{1}{2}$ e $u = \frac{1}{5}$. Mas,

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = t \\ \frac{1}{y} = u \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \end{cases} \qquad \textit{Resposta.} \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$

Exercícios. Série IX

Resolver os seguintes sistemas:

1. $\frac{6}{x} + \frac{7}{y} = -\frac{3}{2}$; $\frac{7}{x} - \frac{6}{y} = \frac{16}{3}$

2. $\frac{20}{x} + \frac{15}{y} = 13$; $\frac{8}{x} - \frac{25}{y} = -1$

3. $\frac{8}{x} + \frac{6}{y} = 11$; $\frac{10}{x} - \frac{12}{y} = 4$

4. $\frac{x-3}{y+1} = \frac{x-6}{y-2}$; $\frac{x+y-5}{x-y+1} = 3$

5. $\frac{2}{x} - \frac{5}{3y} = \frac{4}{27}$; $\frac{1}{4x} + \frac{1}{y} = \frac{11}{72}$

6. $\frac{2}{3x} + \frac{4}{5y} = 3$; $\frac{5}{6x} - \frac{7}{2y} = 5$

7. $\frac{4x}{3y+2} = 4$; $\frac{2x}{4x-3y+1} = \frac{1}{4}$

8. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} = 5$; $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{y+1} = 12$

Problemas. Série X

Os problemas que se seguem deverão ser resolvidos com duas incógnitas.

1. Dois operários, A e B, podem fazer um móvel em 12 dias, trabalhando juntos. Mas, ao cabo de 5 dias de trabalho, A fica doente e B, para terminar o móvel combinado, é obrigado a trabalhar mais 21 dias. Em quantos dias cada um dêstes operários, trabalhando só, faria o mesmo serviço?

Solução. Sejam x e y os dois tempos pedidos. Se A faz o serviço em x dias, em 1 dia fará $\frac{1}{x}$; se B faz o serviço em y dias, em 1 dia fará $\frac{1}{y}$. Mas, se os dois, trabalhando juntos, fazem o serviço em 12 dias, conclue-se

que a soma dos trabalhos feitos por A e B, em 1 dia, representa $\frac{1}{12}$ do serviço todo, isto é,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{12} \qquad (1)$$

Acontece porém que, ao cabo de 5 dias, A fica doente e B, para concluir o serviço, é obrigado a trabalhar mais 21 dias. Donde se conclue que A trabalhou 5 dias e B trabalhou 26 dias. Nestas condições, A fez $\frac{5}{x}$ do serviço e B fez $\frac{26}{y}$ do mesmo serviço, isto é,

$$\frac{5}{x} + \frac{26}{y} = 1 \qquad (2)$$

As equações (1) e (2) formam o sistema que é necessário resolver.

2. Um empregado ganha por dia Cr.\$10,00 e comida. Mas, quando não trabalha, paga Cr.\$3,75 pela mesma comida. Ao cabo de 100 dias, recebe Cr.\$903,75. Quantos dias faltou ao trabalho?

3. A e B, trabalhando juntos, fazem um serviço em 15 dias. Ao cabo de 8 dias de trabalho, A se retira e B, para concluir o trabalho combinado, é obrigado a trabalhar mais 9 dias. Em quantos dias cada um dos operários, trabalhando só, faria o mesmo serviço?

4. A e B, trabalhando juntos, constroem uma parede em 7 dias e ⅕ do dia. Ao cabo de 3 dias, A se retira e B, para terminar a parede, trabalha mais 7 dias. Em quantos dias, cada um dos operários, trabalhando só, construiria a mesma parede?

5. A e B constroem uma parede em 40 dias. Entretanto, se A duplicasse a sua atividade, e B triplicasse a sua, a parede ficaria pronta em 15 dias. Em quantos dias, cada um dêstes operários construiria sòzinho a mesma parede?

6. Um tanque tem duas torneiras, as quais, abertas simultâneamente, enchem o mesmo tanque em 36 minutos. Abrem-se as duas torneiras; ao cabo de 15 minutos, fecha-se uma delas, deixa-se a outra aberta e verifica-se que são necessários mais 40 minutos para que o tanque fique cheio. Em quanto tempo cada uma das torneiras encheria o tanque?

7. A soma de dois números é 7 e a soma dos recíprocos dêstes mesmos números é 7/12. Determinar os dois números.

8. Determinar dois números sabendo que a soma e a diferença de seus recíprocos são, respectivamente, ⅚ e ⅙.

9. O quociente de dois números é 0,875. A diferença dos recíprocos dêstes mesmos números é 1/56. Determinar os dois números.

10. Em um teatro foram vendidas 300 entradas, por Cr.\$1 250,00. As entradas para os adultos custavam Cr.\$5,00 e, para os menores, Cr.\$2,50. Quantas entradas para adultos foram vendidas, e quantas para menores?

11. O perímetro de um retângulo mede 26m. Se o comprimento aumentar de 4m e a largura aumentar de 2m, a área dêste retângulo aumentará de 46 metros quadrados. Determinar as duas dimensões.

12. Uma certa quantia, posta a render juros em um banco, se eleva a Cr.\$262,50 em 10 meses, e a Cr.\$272,50 em 18 meses. Determinar esta quantia e a taxa de juros.

13. Para construir uma parede, 6 pedreiros e 4 serventes trabalharam durante 30 dias. Entretanto, se um pedreiro fosse substituído por um servente, a mesma parede seria construída em 32 dias. Em quantos dias 12 pedreiros fariam êste serviço?

N.B. Sejam x e y as porções de trabalho feitas respectivamente por um pedreiro e um servente, *durante um dia.*

14. Um torrador preparou 50kg de café, misturando duas qualidades cujos preços respectivos por kg são Cr.$2,60 e Cr.$3,50, e vendeu cada kg desta mistura a Cr.$3,20. Determinar quantos kg de café de Cr.$2,60 êle misturou com o café de Cr.$3,50.

15. Um joalheiro tem ouro do título de 0,84 e ouro do título de 0,92. Quantas gramas de cada qualidade deve ligar para fazer uma pulseira com 50g de pêso e cujo título seja 0,9?

Solução. Sejam x e y as duas porções; a primeira equação do problema será:

$$x + y = 50$$

A primeira porção contém 0,84 de seu pêso, de metal fino; a segunda contém 0,92; a pulseira contém 0,9. Portanto, a segunda equação é:

$$\frac{84x}{100} + \frac{92y}{100} = \frac{90 \times 50}{100}$$

14. As fórmulas de Cramer. Já vimos (§10) que duas equações simultâneas do primeiro grau, com duas incógnitas, podem sempre ser reduzidas à seguinte forma:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{a}x + \mathbf{b}y &= \mathbf{c} \\ \mathbf{a}'x + \mathbf{b}'y &= \mathbf{c}' \end{aligned} \right\} \qquad \text{(A)}$$

Vamos resolver êste sistema, recorrendo a um dos métodos conhecidos, por exemplo, ao de eliminação por comparação.

Eliminando y, teremos:

$$\left\{ \begin{aligned} y &= \frac{c - ax}{b} \\ y &= \frac{c' - a'x}{b'} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{c - ax}{b} = \frac{c' - a'x}{b'}$$

$$\begin{aligned} bc' - ba'x &= cb' - ab'x \\ ab'x - ba'x &= cb' - bc' \\ x(ab' - ba') &= cb' - bc' \end{aligned}$$

$$x = \frac{\mathbf{cb' - bc'}}{\mathbf{ab' - ba'}}$$

Eliminando x, teremos:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{c - by}{a} \\ x &= \frac{c' - b'y}{a'} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{c - by}{a} = \frac{c' - b'y}{a'}$$

$$\begin{aligned} ca' - ba'y &= ac' - ab'y \\ ab'y - ba'y &= ac' - ca' \\ y(ab' - ba') &= ac' - ca' \end{aligned}$$

$$y = \frac{\mathbf{ac' - ca'}}{\mathbf{ab' - ba'}}$$

São estas as chamadas **fórmulas de Cramer** (para o caso mais simples de duas equações simultâneas do primeiro grau, com duas incógnitas). Elas são válidas, evidentemente, para $ab - ab' \neq 0$, e nos permitem resolver um sistema de duas equações simultâneas do primeiro grau com duas incógnitas, sem recorrer aos três processos conhecidos de eliminação.

Como exemplo, vamos resolver o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{aligned} 3x - 5y &= 2 \\ 4x + 3y &= -3 \end{aligned} \right\}$$

Antes de aplicar as fórmulas de Cramer à resolução dêste sistema, é necessário observar que:

$$\begin{aligned} a &= +3 \qquad & a' &= +4 \\ b &= -5 & b' &= +3 \\ c &= +2 & c' &= -3 \end{aligned}$$

Isto pôsto, tomando as fórmulas de Cramer, teremos:

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \qquad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

$$x = \frac{2 \times 3 - (-5)(-3)}{3 \times 3 - (-5) \times 4} \qquad y = \frac{3(-3) - 2 \times 4}{3 \times 3 - (-5) \times 4}$$

$$x = \frac{6 - 15}{9 + 20} \qquad y = \frac{-9 - 8}{9 + 20}$$

$$x = -\frac{9}{29} \qquad y = -\frac{17}{29}$$

Não é difícil lembrar as fórmulas de Cramer. Ambas têm o mesmo denominador. Para obter de pronto êste denominador, procede-se do seguinte modo:

a) Escreve-se **ab — ba.**

b) Põe-se uma linha na segunda letra de cada um dêstes produtos, isto é, **ab' — ba'.**

Para ter o numerador de x, toma-se o binômio **ab' — ba'** e substituem-se os coeficientes de x, isto é, **a** e **a'**, pelos têrmos independentes das incógnitas, isto é, **c** e **c'**.

Para ter o numerador de y, toma-se o binômio **ab' — ba'** e substituem-se os coeficientes de y, isto é, **b** e **b'**, pelos têrmos independentes das incógnitas, isto é, **c** e **c'**.

O binômio **ab' — ba'** *é chamado* **determinante** *do sistema.*

Exercícios. Série XI

Observação. Antes de aplicar as fórmulas de Cramer aos sistemas que se seguem, é necessário reduzí-los à forma normal.

Resolver com as fórmulas de Cramer, os seguintes sistemas:

1. $\begin{cases} 20x - 3y = 1 \\ y - 6x = 0 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 3y = 17 \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} 12 + 5y = 6x \\ 3x - 3y = 10 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x - y = -9 \\ x + 1 = y \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} 4x = 2 - y \\ x = 5 + 2y \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} 7m - n = 2 \\ 6m - n = 3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x + \dfrac{2y}{3} = \dfrac{26}{3} \\ 3y - \dfrac{7x}{2} = -4 \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} \dfrac{4x + y}{6x + y} = \dfrac{2}{5} \\ x + \dfrac{10y}{3} = \dfrac{71}{3} \end{cases}$

8. $\begin{cases} 0{,}04x + 0{,}3y = 1 \\ 0{,}5x - 0{,}25y = 4{,}5 \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} \dfrac{3x + 2y}{10} - \dfrac{2x - y}{2} = 0 \\ x + y = 28 \end{cases}$

15. Equações simultâneas literais. Podem ser resolvidas com o auxílio dos três métodos de eliminação já estudados, ou com as fórmulas de Cramer.

Exercícios. Série XII

Resolver, por qualquer método, os seguintes sistemas:

1. $\begin{cases} 4x + 2y = 22m \\ 7x - 3y = 6m \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2 \\ ay = bx \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} \dfrac{x}{2a} - \dfrac{2y}{a} = -10 \\ \dfrac{3x}{a} - \dfrac{7y}{4a} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

2. $\begin{cases} 7x - c = 2y \\ 5x - 14c = -3y \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} 8x + 4y = 11m \\ 3y - 4x = -3m \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} bx + ay = a + b \\ ab(x - y) = a^2 - b^2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 30x + 42y = 88a \\ 3x - y = a \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x + 4y = 6c \\ \dfrac{x}{c} - \dfrac{3y}{4c} = 2 \end{cases}$ **7.** $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + y = b + 1 \\ x + \dfrac{y}{b} = a + 1 \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{a} \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{b} \end{cases}$

16. Discussão das fórmulas de Cramer. Já aprendemos (§ 14) que estas fórmulas são as seguintes:

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \qquad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

As fórmulas de Cramer constituem a solução do sistema A (§ 14); ora, sendo o sistema A, *a forma normal de um sistema de duas equações simultâneas do primeiro grau, com duas incógnitas,* e constituindo as fórmulas de Cramer, *a solução geral dêste sistema,* é claro que, *discutindo estas fórmulas,* estabeleceremos de um modo definitivo, **quantas soluções** *pode ter o sistema* A.

Primeiro caso. $\mathbf{ab' - ba' \neq 0}$. O numerador de x ou de y pode ser igual a *zero* ou diferente de *zero;* em qualquer caso, as fórmulas de Cramer dar-nos-ão *um valor, e sòmente um para* **x**, *assim como um valor, e sòmente um, para* **y**. Êste valor pode ser um número inteiro ou fracionário, positivo ou negativo, ou nulo. Neste caso, *o sistema dado tem sòmente uma solução,* como já verificámos numerosas vêzes; é o caso geral.

Segundo caso. $\mathbf{ab' - ba' = 0}$. Estamos admitindo que o denominador comum às duas fórmulas de Cramer, isto é, o *determinante do sistema,* é nulo.

Suponhamos que o numerador de x, $\mathbf{cb' - bc'}$, também é nulo. Neste caso, o valor de x é $\dfrac{0}{0}$, isto é, *indeterminado.* Vamos demonstrar que o valor de y é também indeterminado. Com efeito,

$$ab' - ba' = 0 \qquad ab' = ba' \qquad \frac{ab'}{a'b'} = \frac{ba'}{a'b'} \qquad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \quad (1)$$

$$cb' - bc' = 0 \qquad cb' = bc' \qquad \frac{cb'}{b'c'} = \frac{bc'}{b'c'} \qquad \frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} \quad (2)$$

De (1) e (2) deduzimos que:

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} \therefore ac' = ca' \therefore$$

$$\mathbf{ac' - ca' = 0}$$

Portanto, quando o valor de x é indeterminado, o valor de y também é indeterminado, e *o sistema admite uma infinidade de soluções. E' um sistema indeterminado.*

Teorema. *Quando, num sistema de duas equações simultâneas do primeiro grau com duas incógnitas, os valores de* **x** *e* **y** *são indeterminados, as duas equações não são* **distintas;** *são* **eqüivalentes.**

Com efeito, desde que

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}, \text{ podemos escrever:}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = n \;\therefore\; a = na', \quad b = nb', \quad c = nc'$$

Voltando ao sistema A, e substituindo os coeficientes a, b e c, respectivamente por na', nb' e nc', resulta:

$$\begin{cases} na'x + nb'y = nc' \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \;\therefore\; \begin{cases} a'x + b'y = c' \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Donde se vê que as duas equações se reduzem, na realidade, a uma equação do primeiro grau com duas incógnitas, (§ 3) devendo ter, necessàriamente, uma infinidade de soluções.

Terceiro caso. $\mathbf{ab' - ba' = 0}$. Admitimos, como no segundo caso, que o determinante do sistema é nulo.

Mas, em lugar de supor que o numerador de x, $\mathbf{cb' - bc'}$, também é nulo, vamos supor que é diferente de zero, isto é, $cb' - bc' = n$. **(um número qualquer não nulo)** Neste caso, o valor de x é $\frac{n}{0}$, isto é, *infinito*. Vamos demonstrar que o valor de y é também *infinito*. Com efeito,

$$ab' - ba' = 0 \qquad ab' = ba' \qquad \frac{ab'}{a'b'} = \frac{ba'}{a'b'} \qquad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \; (1)$$

$$cb' - bc' \neq 0 \qquad cb' \neq bc' \qquad \frac{cb'}{b'c'} \neq \frac{bc'}{b'c'} \qquad \frac{c}{c'} \neq \frac{b}{b'} \; (2)$$

De (1) e (2) deduzimos que:

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{c}{c'} \;\therefore\; ac' \neq ca' \;\therefore$$

$$\mathbf{ac' - ca' \neq 0}$$

Ora, $\mathbf{ac' - ca'}$ é o numerador de y; portanto, quando o valor de x é *infinito*, o valor de y, sendo da forma $\frac{n}{0}$, é também *infinito, e o sistema é impossível, não tem solução.*

Teorema. *Quando, num sistema de duas equações simultâneas do primeiro grau, com duas incógnitas, os valores de* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *são infinitos, as duas equações são* **incompatíveis.**

Com efeito, desde que

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{c'} \neq \frac{b}{b'} \quad \text{podemos escrever:}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = m \qquad a = ma' \qquad b = mb'$$

$$\frac{c}{c'} = n \qquad c = nc'$$

Naturalmente, $m \neq n$.

Voltando ao sistema A, e substituindo os coeficientes a, b e c, respectivamente por ma', mb' e nc', resulta:

$$\begin{cases} ma'x + mb'y = nc' \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

E dividindo ambos os membros da primeira equação por m, teremos:

$$\begin{cases} a'x + b'y = \dfrac{n}{m} \times c' \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Ora, é evidente que, sendo $m \neq n$, as duas equações são *incompatíveis;* o binômio $\mathbf{a'x + b'y}$ *não pode ter dois valores diferentes.*

Em resumo, considerando o sistema (A):

I. Quando $\mathbf{ab' - ba' \neq 0}$, *o sistema admite uma solução, e sòmente uma; é o caso geral, mais comum na prática.*

II. Quando $\mathbf{ab' - ba' = 0}$ e $\mathbf{cb' - bc' = 0}$, *o sistema é inaeterminado,* porque admite uma infinidade de soluções; as duas equações se reduzem, na realidade, a uma única equação, que tanto pode ser a primeira, como a segunda.

III. Quando $\mathbf{ab' - ba' = 0}$ e $\mathbf{cb' - bc' \neq 0}$, *o sistema é impossível,* porque as duas equações são *incompatíveis.*

O exame dos coeficientes permite determinar, *a priori*, **a** natureza das soluções.

I. Quando $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, o sistema é indeterminado, tem uma infinidade de soluções.

II. Quando $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$, o sistema é impossível, não tem solução.

III. Quando $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$, o sistema tem uma solução única, é um sistema determinado.

Exercícios. Série XIII

1. Dado o sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 4x + ay = 2 \end{cases}$ qual deve ser o valor de a para que o sistema tenha uma solução?

Devemos ter $\dfrac{3}{4} \neq \dfrac{2}{a}$ $\therefore$ $3a \neq 8$ $\therefore$ $a \neq \dfrac{8}{3}\cdot$ E o sistema terá uma solução. Si fizermos $a = \dfrac{8}{3}$, resulta:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 4x + \dfrac{8y}{3} = 2 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 12x + 8y = 6 \end{cases}$$

E observando que $3/12 = 2/8 \neq 5/6$, para $a = 8/3$, as duas equações tornar-se-ão incompatíveis, e o sistema não terá solução.

2. Dado o sistema $\begin{cases} ax + 4y = 7 \\ 5x + 3y = 10 \end{cases}$ qual deve ser o valor de a para que as duas equações sejam incompatíveis?

Devemos ter $\dfrac{a}{5} = \dfrac{4}{3}$ $\therefore$ $3a = 20$ $\therefore$ $a = \dfrac{20}{3}\cdot$

Com efeito, substituindo a por $\dfrac{20}{3}$, teremos:

$$\begin{cases} \dfrac{20x}{3} + 4y = 7 \\ 5x + 3y = 10 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} 20x + 12y = 21 \\ 5x + 3y = 10 \end{cases}$$

Neste sistema temos $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$; portanto, as duas equações são incompatíveis.

3. Dado o sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ 7x + ay = b \end{cases}$ quais os valores que devemos atribuir aos coeficientes a e b, para que o sistema seja indeterminado?

Devemos ter $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$ $\therefore$ $\dfrac{3}{7} = \dfrac{2}{a} = \dfrac{10}{b}$ $\therefore$

$$\frac{3}{7} = \frac{2}{a} \quad \therefore \quad a = \frac{14}{3} \qquad \Bigg| \qquad \frac{3}{7} = \frac{10}{b} \quad \therefore \quad b = \frac{70}{3}$$

Entrando com êstes valores de a e b no sistema dado, teremos:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ 7x + \dfrac{14y}{3} = \dfrac{70}{3} \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ 21x + 14y = 70 \end{cases}$$

E êste sistema é indeterminado, como é fácil verificar.

. Dado o sistema $\begin{cases} 5x - 6y = 10 \\ -ax + 3y = 3 \end{cases}$ determinar a de modo que o sistema tenha uma solução.

N. B. Feitas as operações necessárias, o estudante responderá apenas: a *deve ser diferente de.....*

5. Dado o sistema $\begin{cases} ax + y = 11 \\ 4x + 7y = 8 \end{cases}$ determinar a de modo que o sistema não tenha solução.

6. Dado o sistema $\begin{cases} 7x - 6y = 12 \\ 8x - ay = 7 \end{cases}$ determinar a de modo que o sistema seja impossível.

7. Dado o sistema $\begin{cases} x + ay = 3 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$ determinar a de modo que as equações sejam incompatíveis.

8. Dado o sistema $\begin{cases} 8x - ay = 1 \\ 5x + 2y = 7 \end{cases}$ determinar a de modo que tenhamos $x = \infty$ e $y = \infty$.

9. Dado o sistema $\begin{cases} 3x + 5y = 10 \\ ax + by = 3 \end{cases}$ determinar a e b de modo que o sistema seja indeterminado.

10. Dado o sistema $\begin{cases} 5x - ay = 9 \\ 3x + 5y = b \end{cases}$ determinar a e b de modo que tenhamos $x = \dfrac{0}{0}$ e $y = \dfrac{0}{0}\cdot$

17. Resolução gráfica das equações simultâneas. Consideremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$$

Êle é constituído por duas equações lineares. Construindo os gráficos respectivos, como está indicado na figura, veremos que

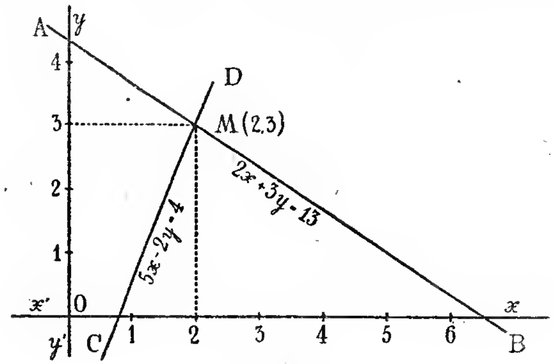


Fig. 7

a reta AB, gráfico da equação $2x + 3y = 13$, e a reta CD, gráfico da equação $5x - 2y = 4$, se cortam em um ponto M, cujas coordenadas são 2 e 3. Se o ponto M está situado nas duas retas, suas coordenadas satisfazem *simultâneamente* às duas equações.

Logo, o sistema proposto ficará satisfeito pelos seguintes valores das incógnitas; : $x = 2$ e $y = 3$.

E lembrando que duas retas só se podem cortar em um ponto, conclue-se que existem sòmente um valor para x e um valor para y, que satisfazem simultâneamente às duas equações do sistema proposto.

Prova-se assim gràficamente que o sistema A (§ 14) tem, em geral, uma solução e sòmente uma.

Regra. *Para resolver gràficamente um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas, constroem-se os gráficos das duas equações. As coordenadas do ponto de intersecção das duas retas constituem a solução do problema.*

Exercícios. Série XIV

Resolver gràficamente os seguintes sistemas:

1. $2x - y = 3$ $3x + y = 7$	**3.** $x - y = 1$ $2x - 3y = 5$	**5.** $x + y = 7$ $x - y = 3$
2. $x + y = 1$ $2x - y = -10$	**4.** $x + y = 3$ $x + 2y = 1$	**6.** $4x - y = 6$ $2x + y = 9$

18. Casos particulares. Consideremos o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{aligned} 2x - 3y &= 4 \\ 4x - 6y &= 8 \end{aligned} \right\} \qquad \text{(A)}$$

Se o resolvermos gràficamente veremos que as retas que representam as duas equações se confundem, constituindo uma única reta. Portanto, *o sistema* A *tem uma infinidade de soluções,* porque as coordenadas de um ponto qualquer da reta satisfazem simultâneamente às duas equações dêste sistema.

Como explicar, ***interpretar êste resultado singular?***

Observando as duas equações, notamos que *os coeficientes da segunda são proporcionais aos coeficientes da primeira,* isto é, a segunda se deduz da primeira, multiplicando ambos os membros desta pelo número 2. Logo, *estas duas equações não são distintas; são eqüivalentes* (§ 7) e, por conseqüência, é bastante resolver uma delas, por exemplo, a primeira. Mas, neste caso, acharemos para x e y uma infinidade de valores. (§ 3)

Consideremos o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{aligned} x - y &= 12 \\ 2x - 2y &= 15 \end{aligned} \right\} \qquad \text{(B)}$$

Resolvendo-o gràficamente, outra surpresa nos espera; as retas representativas destas equações são paralelas! Portanto, não têm um ponto comum, e o sistema B não tem solução.

Como interpretar êste novo resultado singular?

Multiplicando a primeira equação do sistema B por 2, teremos:

$$\left\{ \begin{aligned} 2x - 2y &= 24 \\ 2x - 2y &= 15 \end{aligned} \right\} \qquad \text{(C)}$$

Torna-se evidente que não é possível determinar para x e y, valores que satisfaçam simultâneamente às equações do sistema C e, por conseqüência, às equações do sistema B. As equações dêste sistema são **incompatíveis** ou **contraditórias.**

CAPÍTULO II

Teoria das Desigualdades

19. Preliminares. Dados dois números a e b, se o número a é maior que o número b, podemos calcular a diferença $a - b$, e o resultado é um *número positivo.* No caso contrário, isto é, quando o número a é menor que o número b, ainda podemos calcular a diferença $a - b$, mas o resultado é um *número negativo.*

Para indicar que o número a é maior que o número b, escreveremos :

$$a > b$$

Para indicar que o número a é menor que o número b, escreveremos :

$$a < b$$

Um número a é maior que um número b, quando a diferença $a - b$ é um número positivo.

Um número a é menor que um número b, quando a diferença $a - b$ é um número negativo.

Destas duas definições resulta imediatamente que:

Se a diferença entre dois números é positiva, o primeiro é maior que o segundo. Por exemplo, se $m - n > 0$, conclue-se que $m > n$.

Se a diferença entre dois números é negativa, o primeiro é menor que o segundo. Por exemplo, se $m - n < 0$, conclue-se que $m < n$.

Com estas noções preliminares, podemos confirmar certas noções já adquiridas. (E.M.T.V. § 12)

I. *Um número positivo qualquer é maior que zero.* Com efeito, $5 > 0$, porque $5 - 0 = 5$.

II. *Zero é maior que um número negativo qualquer.* Realmente, $0 > -7$, porque $0 - (-7) = 0 + 7 = 7$.

III. *De dois números negativos quaisquer, o maior é aquele cujo valor absoluto é menor.* Por exemplo, $-3 > -5$, porque $(-3) - (-5) = -3 + 5 = 2$.

20. Desigualdades. Consideremos as duas expressões aritméticas seguintes:

$$7 \times 8 + 4 \quad \text{e} \quad 5 \times 9 + 2 \times 3$$

Calculando-as, verificaremos que os valores respectivos destas duas expressões são 60 e 51. Ora, sendo $60 > 51$, podemos escrever:

$$7 \times 8 + 4 > 5 \times 9 + 2 \times 3 \qquad (A)$$

$$5 \times 9 + 2 \times 3 < 7 \times 8 + 4 \qquad (B)$$

Os conjuntos (A) e (B) são chamados *desigualdades.*

Desigualdade é um conjunto constituído por duas expressões aritméticas cujos valores são diferentes.

A expressão que fica à esquerda do sinal $>$ ou $<$ é o *primeiro membro da desigualdade ;* a que fica à direita do mesmo sinal é o *segundo membro da desigualdade.*

Consideremos as desigualdades

$$3x + 7 > 2x + 12 \qquad 2x - 3 > 9 - x$$

Em ambas, o primeiro membro é maior que o segundo; dizemos, em Matemática, que *estas duas desigualdades* **são do mesmo sentido.** Também as desigualdades

$$5x - 1 < 4x + 9 \qquad 6x + 5 < 3x + 17$$

são do mesmo sentido. Entretanto, as desigualdades

$$3x + 7 > 2x + 12 \qquad 3 - 2x < x - 9$$

são de sentido contrário.

21. Inequações. *Qual é o número inteiro cujo dôbro, mais 7, é maior que 20?* Traduzindo êste problema em linguagem algébrica, teremos:

$$2x + 7 > 20 \qquad (A)$$

Atribuindo a x, sucessivamente, os valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, etc., verificamos facilmente que os valores de x que convêm à desigualdade A, são todos os números inteiros superiores a 6; o número 6 e os números inteiros inferiores a 6, não convêm à desigualdade A. Portanto, a desigualdade A *é verificada, é satisfeita,* por qualquer número inteiro, *maior que* 6. Donde resulta que há uma infinidade de números inteiros, cujo dôbro, mais 7, é maior que 20; são os números 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15,...

A desigualdade A é chamada **inequação.**

Inequação *é a desigualdade que contém letras e que se verifica sòmente para certos e determinados valores atribuídos a estas mesmas letras.*

As letras que figuram numa inequação, e às quais devemos atribuir valores determinados, para que a inequação seja verificada, são chamadas **incógnitas.**

Raízes *de uma inequação são os valores da incógnita, que verificam a inequação.*

Resolver uma inequação é determinar as suas raízes.

22. Teoremas relativos às desigualdades. I. *Somando o mesmo número a ambos os membros de uma desigualdade, ela não muda de sentido.*

H. $\{ a > b$	Por hipótese ..... $a > b$
T. $\{ a + m > b + m$	Donde resulta que $a - b > 0$

E' evidente que o primeiro membro desta desigualdade não se altera, somando-lhe e, em seguida, diminuindo-lhe o mesmo número m. Portanto,

$$a - b + m - m > 0$$

Agrupando os quatro têrmos, dois a dois, com o auxílio dos parênteses, resulta:

$$(a + m) - (b + m) > 0$$

Portanto, (§ 19) $a + m > b + m$ C.Q.D.

II. *Diminuindo o mesmo número de ambos os membros de uma desigualdade, ela não muda de sentido.*

H. $\{ a > b$	Por hipótese ..... $a > b$
T. $\{ a - m > b - m$	Donde resulta que $a - b > 0$

E' evidente que o primeiro membro desta desigualdade não se altera, somando-lhe e, em seguida, diminuindo-lhe o mesmo número m. Logo,

$$a - b + m - m > 0$$

Agrupando os quatro têrmos, dois a dois, com o auxílio dos parênteses, resulta:

$$(a - m) - (b - m) > 0$$

Portanto, (§ 19) $a - m > b - m$ C.Q.D.

Dos dois teoremas demonstrados resulta o seguinte

Corolário. *Uma inequação não muda de sentido, quando passamos um têrmo qualquer, de um para o outro membro da mesma inequação,* **contanto-que mudemos o sinal do têrmo.**

Consideremos a inequação seguinte:

$$3x - 12 > 2x + 3 \qquad (A)$$

Somando 12 a ambos os membros (teorema I).....

$$3x - 12 + 12 > 2x + 3 + 12 \quad \therefore$$
$$3x > 2x + 3 + 12$$

Subtraindo $2x$ de ambos os membros desta última inequação (teorema II).....

$$3x - 2x > 2x + 3 + 12 - 2x$$
$$3x - 2x > 3 + 12 \qquad (B)$$

Comparando as inequações A e B, observamos que os têrmos -12 e $+2x$ da *primeira*, passaram respectivamente para o segundo e para o primeiro membro da *segunda*, mas com sinais contrários.

Podemos, pois, ao resolver uma inequação, *transpor* um têrmo de um para outro membro, tal qual como fazemos com as equações. Por exemplo, dada a inequação

$$3x - 7 + 2x > 5x + 12 - 6x \qquad (C)$$

podemos escrever

$$3x + 2x + 6x - 5x > 12 + 7 \qquad (D)$$

E diremos que **as inequações C e D são eqüivalentes.**

III. *Multiplicando ambos os membros de uma desigualdade por um mesmo número* **positivo** e **diferente de zero,** *ela não muda de sentido.*

H. $\begin{cases} a > b \\ n > 0 \end{cases}$	Por hipótese .... $a > b$
T. $\{ an > bn$	Donde resulta que $a - b > 0$

Multiplicando $a - b$, número positivo, por n, que é também um número positivo, o produto é um número positivo. Portanto,

$$(a - b)n > 0 \quad \therefore \quad an - bn > 0 \quad \therefore \quad an > bn \qquad \text{C.Q.D.}$$

IV. *Multiplicando ambos os membros de uma desigualdade, por um mesmo número* **negativo** e **diferente de zero, ela muda de sentido.**

$$\text{H.}\ \begin{cases} a > b \\ n < 0 \end{cases} \qquad \text{T.}\ \{\ an < bn$$

Por hipótese . . . $a > b$
Donde resulta que $a - b > 0$

Multiplicando $a - b$, número positivo, por n, número negativo, o produto é um número negativo. Portanto,

$$(a-b)n < 0 \ \therefore\ an - bn < 0 \ \therefore\ an < bn \qquad \text{C.Q.D.}$$

Corolário. *Quando uma inequação tem denominadores numéricos, podemos eliminá-los, multiplicando ambos os membros da inequação pelo m. m. c. dos denominadores.*

Na prática procede-se como em relação às equações inteiras, com denominadores numéricos. Consideremos a inequação

$$\frac{4-2x}{3} + 5x > 12 - \frac{5-3x}{2} \ \therefore$$
$$2(4-2x) + 30x > 72 - 3(5-3x) \ \therefore$$
$$8 - 4x + 30x > 72 - 15 + 9x \ \therefore$$
$$-4x + 30x - 9x > 72 - 15 - 8 \ \therefore$$
$$17x > 49$$

Observação. E' permitido mudar os sinais de todos os têrmos de uma inequação, *contanto-que se mude o sentido da mesma* porque, mudar os sinais de todos os têrmos de uma inequação, é o mesmo que multiplicar os seus membros por -1. Por exemplo,

$$3x - 7 > 4x + 3$$
$$3x - 4x > 3 + 7$$
$$-x > 10$$
$$x < -10$$

V. *Dividindo ambos os membros de uma desigualdade por um mesmo número* **positivo** *e diferente de zero, ela não muda de sentido.*

$$\text{H.}\ \begin{cases} a > b \\ n > 0 \end{cases} \qquad \text{T.}\ \left\{\ \frac{a}{n} > \frac{b}{n}\right.$$

Por hipótese . . . . $a > b$
Donde resulta que . . $a - b > 0$

Dividindo $a - b$, número positivo, por n, que também é um número positivo, o quociente é um número positivo. Portanto,

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} > 0 \ \therefore\ \frac{a}{n} > \frac{b}{n} \qquad \text{C.Q.D.}$$

VI. *Dividindo ambos os membros de uma desigualdade por um mesmo número* **negativo** *e diferente de zero, ela muda de sentido.*

$$\text{H.}\ \begin{cases} a > b \\ n < 0 \end{cases} \qquad \text{T.}\ \left\{\ \frac{a}{n} < \frac{b}{n}\right.$$

Por hipótese . . . . $a > b$
Donde resulta que . . . . $a - b > 0$

Dividindo $a - b$, número positivo, por n, número negativo, o quociente é negativo. Portanto,

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} < 0 \ \therefore\ \frac{a}{n} < \frac{b}{n} \qquad \text{C.Q.D.}$$

VII. *Somando duas desigualdades do mesmo sentido, resulta uma desigualdade do mesmo sentido que as desigualdades dadas.*

$$\text{H.}\ \begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \qquad \text{T.}\ \{\ a + c > b + d$$

Por hipótese . . . . . $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases}$
Donde resulta que $\begin{cases} a - b > 0 \\ c - d > 0 \end{cases}$

Sendo $a - b$ e $c - d$, números positivos, sua soma é também um número positivo; portanto...

$$a - b + c - d > 0 \ \therefore\ (a+c) - (b+d) > 0 \ \therefore\ a + c > b + d$$

C.Q.D.

Observação. Entretanto, não podemos somar desigualdades de sentidos contrários porque, a não ser no caso de exemplos numéricos, não sabemos qual o sentido da desigualdade resultante. Por exemplo:

$$\left.\begin{matrix} 11 > 3 \\ 5 < 6 \end{matrix}\right\} + \quad \underline{}\ 16 > 9 \qquad \left.\begin{matrix} 12 > 9 \\ 5 < 8 \end{matrix}\right\} + \quad 17 = 17 \qquad \left.\begin{matrix} 6 > 5 \\ 3 < 8 \end{matrix}\right\} + \quad 9 < 13$$

VIII. *Dadas duas desigualdades de sentidos contrários, e diminuindo a segunda da primeira, resulta uma desigualdade do mesmo sentido que a desigualdade tomada como minuendo.*

$$\text{H.}\ \begin{cases} a > b \\ c < d \end{cases} \qquad \text{T.}\ \{\ a - c > b - d$$

Por hipótese . . . . . $\begin{cases} a > b \\ c < d \end{cases}$
Donde resulta que $\begin{cases} a - b > 0 \\ d - c > 0 \end{cases}$

E, de acôrdo com o teorema VII,

$$a - b + d - c > 0 \ \therefore\ (a-c) - (b-d) > 0 \ \therefore\ a - c > b - d.$$

C.Q.D.

Observação. Entretanto, não podemos diminuir desigualdades do mesmo sentido porque, a não ser no caso de exemplos numéricos, não sabemos qual o sentido da desigualdade resultante. Por exemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 12 > 4 \\ 5 > 2 \end{array}\right\} - \qquad \left.\begin{array}{r} 13 > 9 \\ 5 > 1 \end{array}\right\} - \qquad \left.\begin{array}{r} 11 > 9 \\ 7 > 3 \end{array}\right\} -$$
$$\overline{7 > 2} \qquad\qquad \overline{8 = 8} \qquad\qquad \overline{4 < 6}$$

IX. *Multiplicando duas desigualdades do mesmo sentido, e* **cujos membros são números positivos,** *resulta uma desigualdade do mesmo sentido que as desigualdades dadas.*

H. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases}$

T. $\{\ ac > bd$

Por hipótese ..... $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases}$

Donde resulta que $\begin{cases} a - b > 0 \\ c - d > 0 \end{cases}$

Multiplicando ambos os membros da primeira desigualdade por c (número positivo) e os da segunda por b (número positivo) resulta:

$$\left\{\begin{array}{l} (a-b)c > 0 \\ (c-d)b > 0 \end{array}\right\} \quad \therefore \quad \left\{\begin{array}{l} ac - bc > 0 \\ bc - bd > 0 \end{array}\right\}$$

Somando as duas últimas (teorema VII),

$$ac - bc + bc - bd > 0 \ \therefore\ ac - bd > 0 \ \therefore\ ac > bd$$

C.Q.D.

Observação. Entretanto, não podemos multiplicar desigualdades de sentidos contrários ou cujos membros sejam números negativos porque, a não ser no caso de exemplos numéricos, não sabemos qual o sentido da desigualdade resultante. Por exemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 7 > 3 \\ 4 < 5 \end{array}\right\} \times \qquad \left.\begin{array}{r} 9 > 3 \\ 4 < 12 \end{array}\right\} \times \qquad \left.\begin{array}{r} 5 > 4 \\ 3 < 7 \end{array}\right\} \times$$
$$\overline{28 > 15} \qquad \overline{36 = 36} \qquad \overline{15 < 28}$$

$$\left.\begin{array}{r} 4 > -7 \\ 5 > -2 \end{array}\right\} \times \qquad \left.\begin{array}{r} 4 > -7 \\ 5 > -3 \end{array}\right\} \times \qquad \left.\begin{array}{r} 10 > -5 \\ 3 > -6 \end{array}\right\} \times$$
$$\overline{20 > 14} \qquad \overline{20 < 21} \qquad \overline{30 = 30}$$

$$\left.\begin{array}{r} +7 > -3 \\ -5 < +4 \end{array}\right\} \times \qquad \left.\begin{array}{r} +6 > -9 \\ -3 < +2 \end{array}\right\} \times \qquad \left.\begin{array}{r} +2 > -5 \\ -3 < +4 \end{array}\right\} \times$$
$$\overline{-35 < -12} \qquad \overline{-18 = -18} \qquad \overline{-6 > -20}$$

Primeiro corolário. *Multiplicando três ou mais desigualdades do mesmo sentido, e cujos membros são números positivos, resulta uma desigualdade do mesmo sentido que as desigualdades dadas.*

H. $\begin{cases} a > b \\ c > d \\ m > n \\ r > s \end{cases}$

T. $\{\ acmr > bdns$

Com efeito,

$$\left\{\begin{array}{l} a > b \\ c > d \end{array}\right\} \quad \therefore \quad ac > bd$$
$$\left\{\begin{array}{l} ac > bd \\ m > n \end{array}\right\} \quad \therefore \quad acm > bdn$$
$$\left\{\begin{array}{l} acm > bdn \\ r > s \end{array}\right\} \quad \therefore \quad acmr > bdns$$

C.Q.D.

Segundo corolário. *Elevando ambos os membros de uma desigualdade, cujos membros são números positivos, a uma mesma potência, resulta uma desigualdade do mesmo sentido que a desigualdade dada.*

H. $\{\ a > b$ T. $\{\ a^n > b^n$

Com efeito, repetindo a desigualdade $a > b$, n vêzes, e multiplicando, teremos, de acôrdo com o primeiro corolário:

$$\left.\begin{array}{l} a > b \\ a > b \\ a > b \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ a > b \end{array}\right\} \ \boldsymbol{n}\ \textit{vêzes} \ \therefore\ a^n > b^n$$

C.Q.D.

Observação. Entretanto, se os membros da desigualdade são negativos, as desigualdades resultantes serão ou não serão do mesmo sentido que a desigualdade dada. Por exemplo,

$$-2 > -5 \qquad (1)$$

Elevando à segunda potência.......... $4 < 25$
Elevando à terceira potência .... $-8 > -125$
Elevando à quarta potência........... $16 < 625$
Elevando à quinta potência........... $-32 > -3\,125$

E assim por diante. A conclusão é fácil de tirar; as potências de grau par, de ambos os membros da desigualdade (1) formam uma desigualdade de sentido contrário ao desta desigualdade; as de grau impar formam uma desigualdade do mesmo sentido.

Se os dois membros da desigualdade têm sinais contrários, e queremos elevá-los a uma mesma potência, não sabemos qual o sentido da desigualdade resultante, a não ser no caso de exemplos numéricos. Por exemplo,

$5 > -7$ ...... Elevando ao quadrado .... $25 < 49$
$-4 < 4$ ...... Elevando ao quadrado............. $16 = 16$
$4 > -3$ ...... Elevando ao quadrado............. $16 > 9$

X. *Dadas duas desigualdades de sentidos contrários,* **cujos membros são números positivos,** *e dividindo a primeira pela segunda, resulta uma desigualdade do mesmo sentido que a desigualdade tomada como dividendo.*

H. $\begin{cases} a > b \\ c < d \end{cases}$	Por hipótese ..... $\begin{cases} a > b \\ c < d \end{cases}$
T. $\begin{cases} \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{d} \end{cases}$	Donde resulta que $\begin{cases} a > b \\ d > c \end{cases}$

E, de acôrdo com o teorema IX: $ad > bc$

Dividindo ambos os membros desta última desigualdade por cd (teorema V), resulta:

$$\frac{ad}{cd} > \frac{bc}{cd} \quad \therefore \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{d} \qquad \text{C.Q.D.}$$

Observação. Entretanto, não podemos dividir desigualdades do mesmo sentido, ou cujos membros sejam números negativos, porquê, a não ser no caso de exemplos numéricos, não sabemos qual o sentido da desigualdade resultante. Deixamos aos estudantes o prazer de fazerem esta verificação.

23. A radiciação nas desigualdades. Sendo n um número qualquer, *positivo* ou *negativo*, n^2 é um número positivo. Portanto, $\sqrt{n^2} = \pm n$. Um número negativo não tem raiz quadrada real (§ 56); com efeito, $\sqrt{-n^2}$ não pode ser $+n$, porque o quadrado de $+n$ é $+n^2$, e também não pode ser $-n$, porque o quadrado de $-n$ é $+n^2$. A raiz quadrada de um número negativo é o que se chama, em Matemática, *um número imaginário*, por oposição aos *números reais*, isto é, os positivos, os negativos e o zero.

Consideremos agora a desigualdade seguinte:

$$16 < 25$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros teremos $4 < 5$.

Suponhamos, porém, que ambos os membros da desigualdade dada são negativos; por exemplo:

$$-36 > -49$$

Neste caso, devemos multiplicar ambos os membros da desigualdade, por -1, para, em seguida, extrair a raiz quadrada.

$$-36 > -49 \quad \therefore \quad 36 < 49 \quad \therefore \quad 6 < 7$$

Observação. Ao extrair a raiz de ambos os membros desta desigualdade, tomámos em consideração, sòmente, a raiz positiva. Deixamos de analisar, por enquanto, o caso das raízes de índice superior ao segundo.

Observemos também que, se um dos membros da desigualdade é positivo, e o outro negativo, não é possível extrair a raiz quadrada de ambos os

membros da desigualdade. Se fosse possível, de $a^2 > -b^2$, deduziríamos $a > \sqrt{-b^2}$, isto é, uma comparação entre um número real e um número imaginário, (§ 56) o que é um absurdo.

Exercícios teóricos. Série XV

1. Demonstrar que, sendo $a \neq b$, $a^2 + b^2 > 2ab$.

A diferença $a - b$ pode ser *positiva* ou *negativa*, mas o quadrado de $a - b$ é um número *essencialmente positivo*; portanto,

$$(a - b)^2 > 0$$

Desenvolvendo .... $a^2 - 2ab + b^2 > 0$

Passando $2ab$ para o 2.º membro .... $a^2 + b^2 > 2ab$

2. Demonstrar que, sendo $a > b > 0$, $a^2 + b^2 > ab$.

Consideremos o trinômio $a^2 + b^2 - ab$, ao qual podemos dar a forma $a(a - b) + b^2$. Esta expressão binômia é uma soma de dois números positivos; logo,

$$a(a - b) + b^2 > 0 \quad \therefore \quad a^2 - ab + b^2 > 0 \quad \therefore \quad a^2 + b^2 > ab$$

3. Demonstrar que a média aritmética de dois números positivos e diferentes é maior que a média geométrica dos mesmos.

Sejam a e b dois números positivos quaisquer e diferentes; sua média aritmética é $\dfrac{a+b}{2}$ e a geométrica é $\sqrt{ab}$. (E.M.S.V. §§ 60 e 61)

Vamos demonstrar que $\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.

Com efeito .... $(a - b)^2 > 0$

Desenvolvendo .... $a^2 - 2ab + b^2 > 0$

Somando $4ab$ a ambos os membros $a^2 - 2ab + b^2 + 4ab > 4ab$

Reduzindo .... $a^2 + 2ab + b^2 > 4ab \quad \therefore$

$(a + b)^2 > 4ab$

Extraindo a raiz quadrada .... $a + b > \sqrt{ab}$ (E.M.T.V. § 36)

Dividindo por 2 .... $\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$

Observação. Se os dois números são iguais, a média aritmética é igual à média geométrica. Com efeito, supondo $b = a$, teremos:

$$\frac{a+b}{2} = \frac{a+a}{2} = a \qquad \sqrt{ab} = \sqrt{a^2} = a$$

4. Demonstrar que $a^2+b^2+c^2 > ab+ac+bc$. ($a \neq b$ ou $a \neq c$) (Lembrar que $a^2 + b^2 > 2ab$, $a^2 + c^2 > 2ac$, etc..)

5. Dois números são recíprocos quando seu produto é igual a 1. Por exemplo, $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{3}$ são números recíprocos porque $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$. Convidamos os estudantes a demonstrarem que a soma de dois números recíprocos é maior que 2, isto é $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$. (Lembrar que $a^2 + b^2 > 2ab$, etc..)

6. Sendo a e b números positivos e diferentes, demonstrar que $a^3 + b^3 > a^2b + ab^2$.

Observação. Um dos métodos para demonstrar desigualdades, é aceitá-las como verdadeiras e, em seguida, submetê-las a transformações corretas, até chegar a uma desigualdade evidente, por exemplo $(a - b)^2 > 0$. E' o método que os estudantes devem adotar em relação a êste exercício, começando pela fatoração dos dois membros da desigualdade.

7. Sendo a e b números positivos e diferentes, demonstrar que $a^2 + 3b^2 > 2b(a + b)$. (Método indicado no 6.º exercício.)

8. Dadas as frações $\frac{a+b}{2}$ e $\frac{2ab}{a+b}$ nas quais a e b são números positivos e diferentes, dizer qual é a maior das duas.

(Experimente o estudante as três hipóteses, isto é, suponha a 1.ª fração igual à 2.ª, maior que a 2.ª, e menor que a 2.ª, e responderá à pergunta seguindo sempre o método indicado no 6.º exercício.

9. Dadas as expressões $\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}}$ e $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, nas quais a e b são números positivos e diferentes, dizer qual é a maior das duas. (Elevar ao quadrado, etc..)

24. Resolução das inequações. As inequações (§ 21) podem ser do primeiro grau, do segundo, etc., como as equações. Também podem ser com uma ou duas ou mais incógnitas. Podem ser também inteiras ou fracionárias, numéricas ou literais, etc..

Começaremos pela inequação do primeiro grau com uma incógnita. Esta inequação, depois de completamente simplificada, se reduz sempre a uma das seguintes formas normais:

$$ax > b \quad \therefore \quad x > \frac{b}{a} \qquad\qquad ax < b \quad \therefore \quad x < \frac{b}{a}$$

Observação. O coeficiente a é sempre positivo porque, no caso contrário, multiplicamos os dois membros da desigualdade por -1, mudando assim o sentido da desigualdade.

Se resultar $\mathbf{x} > \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$, isto quer dizer que os valores de x que *verificam, que satisfazem* a inequação dada, *devem ser superiores à* $\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$; portanto, $\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$ **é o limite inferior dos valores de** x.

Se resultar $\mathbf{x} < \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$, isto quer dizer que os valores de x que *verificam, que satisfazem* a inequação dada, *devem ser inferiores à* $\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$; portanto, $\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$ **é o limite superior dos valores de** x.

Fazendo $x = \frac{b}{a}$, teremos a raiz da equação $ax = b$.

Exercícios. Série XVI (*)

1. Determinar um número inteiro e positivo, cuja metade, aumentada de 3, seja maior que a têrça parte do mesmo número, aumentada de 5.

Designando por x o número pedido, e traduzindo o problema em linguagem algébrica, teremos:

$$\frac{x}{2} + 3 > \frac{x}{3} + 5 \qquad (A)$$

Eliminando os denominadores..............	$3x + 18 > 2x + 30$
Transpondo..............................	$3x - 2x > 30 - 18$
Reduzindo...............................	$x > 12$

Resposta. O limite inferior dos valores de x é 12; portanto, os números inteiros que satisfazem ao problema são 13, 14, 15, 16.........∞.

Observação. Para $x = 12$, o primeiro membro da inequação A se torna idêntico ao segundo; portanto, 12 é a raiz da equação $\frac{x}{2} + 3 = \frac{x}{3} + 5$. Aliás, a resolução da inequação é análoga à da equação. Com efeito,

$$\frac{x}{2} + 3 > \frac{x}{3} + 5 \quad \therefore \qquad\qquad \frac{x}{2} + 3 = \frac{x}{3} + 5 \quad \therefore$$
$$3x + 18 > 2x + 30 \quad \therefore \qquad\qquad 3x + 18 = 2x + 30 \quad \therefore$$
$$3x - 2x > 30 - 18 \quad \therefore \qquad\qquad 3x - 2x = 30 - 18 \quad \therefore$$
$$x > 12 \qquad\qquad x = 12$$

2. O triplo da idade de Antônio, menos 8, é maior que a quinta parte da sua idade, mais 20. Qual é a idade de Antônio?

3. Carlos e Raul receberam 100 moedas de Cr.$1,00 e repartiram-nas de modo tal que a diferença entre a metade das moedas de Carlos, e um têrço das moedas de Raul, é maior que 10. Quantas moedas recebeu cada um?

(*) Convém ler a Nota da pág. 271.

4. Um primeiro ano ginasial misto tem 80 alunos. Determinar o número de meninos, sabendo que êste número é divisível por 5 e por 11, e que a metade do número de meninos é maior que a têrça parte do número de meninas.

5. Tenho livros escritos em português e francês, ao todo 200 volumes. A metade mais a têrça parte dos livros escritos em português é menor que a quarta parte dos livros escritos em francês. Quantos são os livros escritos em francês, e quantos em português?

Resolver as inequações seguintes:

6. $7x - 4 < 5x + 2$	**11.** $5 + \frac{3x-1}{2} < \frac{x+4}{3}$	**16.** $\frac{3}{4} - 5x < 8 - \frac{2x}{3}$
7. $10 - 3x < 20 - 5x$	**12.** $\frac{x-3}{5} > 2 - \frac{3x-1}{2}$	**17.** $\frac{x}{10} - \frac{x}{12} > \frac{1}{2} - 3x$
8. $\frac{2x}{3} + \frac{1}{2} > \frac{3x}{5} + 3$	**13.** $3 - \frac{x}{2} - \frac{5-2x}{3} > 0$	**18.** $\frac{4}{5} - \frac{x}{2} < \frac{2}{3} - \frac{3x}{4}$
9. $\frac{3x}{2} + \frac{1}{2} < 5x - 3$	**14.** $\frac{x}{2} - 3 > x - \frac{1}{5}$	**19.** $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} > x - 1$
10. $5(x-3) < 6(2x+1)$	**15.** $3(2x+1) > 2(1-3x)$	**20.** $\frac{1}{2} < \frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3}$

21. $\frac{3(x-1)}{2} - \frac{5(2-x)}{3} > 0$	**23.** $\frac{2(1-x)}{3} - \frac{3(1-2x)}{4} > \frac{5(2-3x)}{2} + \frac{x}{10}$
22. $\frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{4} < \frac{x-4}{5} - \frac{x-5}{6}$	**24.** $\frac{5-x}{2} - \frac{2-x}{3} > \frac{3x}{10} - \frac{3-5x}{5}$

25. Inequações simultâneas do primeiro grau com uma incógnita. Para compreender êste assunto, é conveniente resolver os três problemas que se seguem.

I. *Tenho laranjas. Metade delas, mais 2, é maior que um têrço delas, mais 3; entretanto, metade delas, mais 1, é menor que a quarta parte delas, mais 2.* Quantas laranjas tenho?

Traduzindo êste problema em linguagem algébrica, resulta:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{2}+2 > \frac{x}{3}+3 \\ \frac{x}{2}+1 < \frac{x}{4}+2 \end{array}\right\} \text{(A)}$$

Estas duas inequações são **simultâneas,** *porque resultam de um mesmo problema.* Portanto, *os valores de* **x** *que verificarem a primeira,* **deverão verificar também a segunda.**

Resolvendo-as, teremos:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+12 > 2x+18 \\ 2x+\ 4 < x+8 \end{array}\right\} \therefore \left\{\begin{array}{l} x > 6 \\ x < 4 \end{array}\right\}$$

Portanto, para que x verifique, ao mesmo tempo, as duas inequações do sistema A, *é necessário que seja maior que* **6** *e menor que* **4**, o que é, evidentemente, impossível. Para a primeira inequação do sistema A, *o limite inferior dos valores de* **x** *é* **6**; para a segunda inequação do mesmo sistema, *o limite superior dos valores de* x é 4. Estes dois limites são *contraditórios.* Logo, as duas inequações que constituem o sistema A são **incompatíveis,** o sistema não tem solução e, portanto, o problema também não tem solução.

II. *Tenho laranjas. Metade delas, mais 2, é menor que um têrço delas, mais 3; entretanto, metade delas, mais 1, é maior que a quarta parte delas, mais 2. Quantas laranjas tenho?*

Traduzindo êste problema em linguagem algébrica, teremos:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{2}+2 < \frac{x}{3}+3 \\ \frac{x}{2}+1 > \frac{x}{4}+2 \end{array}\right\} \text{(B)}$$

Estas duas inequações são **simultâneas,** *porque resultam de um mesmo problema.* Portanto, *os valores de* **x** *que verificarem a primeira,* **deverão verificar também a segunda.**

Resolvendo-as, teremos:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+12 < 2x+18 \\ 2x+\ 4 > x+\ 8 \end{array}\right\} \therefore \left\{\begin{array}{l} x < 6 \\ x > 4 \end{array}\right\}$$

Agora os *limites* não são *contraditórios,* e x devendo ser um número inteiro maior que 4 e menor que 6, teremos $x = 5$. E as duas inequações que constituem o sistema B são chamadas *compatíveis.*

III. *Tenho laranjas. Metade delas, menos 3, é maior que a têrça parte delas, mais 2; metade delas, menos* **5**, *é maior que a têrça parte delas, menos 2. Quantas laranjas tenho?*

Traduzindo êste problema em linguagem algébrica, teremos:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{2}-3 > \frac{x}{3}+2 \\ \frac{x}{2}-5 > \frac{x}{3}-2 \end{array}\right\} \text{(C)}$$

Estas duas inequações são **simultâneas,** *porque resultam de um mesmo problema. Portanto, os valores de* **x** *que verificarem a primeira,* **deverão verificar também a segunda.**

Resolvendo-as, teremos:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x-18 > 2x+12 \\ 3x-30 > 2x-12 \end{array}\right\} \therefore \left\{\begin{array}{l} x > 30 \\ x > 18 \end{array}\right\}$$

Portanto, para que x verifique, ao mesmo tempo, as duas inequações, é *necessário que seja maior que* 30 *e maior que* 18; os dois limites não são contraditórios, e é evidente que, sendo x maior que 30, verificará as duas inequações do sistema B.

Portanto, tenho 31, 32, 33, 34, 35... laranjas.

As duas inequações que constituem o sistema C são também compatíveis, *e o limite inferior dos valores de* x, *que verificam as duas inequações, é* 30.

Exercícios. Série XVII

1. Determinar um número inteiro, cuja metade mais 2 seja maior que a têrça parte mais 3, e cuja metade menos 4 seja menor que a têrça parte menos 2.

2. Vejo canários; a metade mais 2 é maior que a têrça parte mais 3; entretanto, a metade mais um, é menor que a têrça parte mais 2. Quantos são os canários?

Determinar os valores inteiros de x que verificam os sistemas seguintes:

3. $5(2x+1) < x+6$
   $4(x+3) > 2x-9$

4. $\frac{x}{5} - \frac{x}{7} + \frac{x}{3} < x-4$
   $x > \frac{x}{2} + \frac{x}{5} - 1$

5. $\frac{2}{3} - \frac{x-1}{2} < \frac{2-3x}{4}$
   $\frac{x-2}{3} > \frac{2-x}{5}$

6. $\frac{4-x}{3} - \frac{2-x}{2} + \frac{1+x}{5} > 0$
   $\frac{x}{3} - \frac{5x-2}{2} + \frac{1-x}{4} < 0$

7. $x-5 > 3(2-3x)$
   $5(2x-1) < 2(x-7)$

8. $5(x+3) - \frac{1}{3} < 9x$
   $\frac{x}{6} - \frac{1-x}{4} < 7x+2$

9. $\frac{2x-1}{5} > \frac{3x-4}{2} + x$
   $\frac{5x+3}{4} > \frac{3x}{5}$

10. $\frac{x-1}{5} > \frac{x-2}{4}$
    $\frac{x-4}{3} < \frac{x-5}{2}$

26. Inequações simultâneas do primeiro grau com duas incógnitas. O caso de uma inequação do primeiro grau com duas incógnitas não oferece dificuldade.

Por exemplo, dada a inequação

$$3x - 2y > 5$$

atribuímos a x (ou a y) um valor qualquer e, em seguida, calculamos os valores resultantes para y (ou x).

O problema se torna interessante, quando se trata de resolver duas inequações simultâneas do primeiro grau com duas incógnitas. Consideremos o seguinte sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x - y > 5 \\ x - 2y < 7 \end{array}\right\} \text{(A)} \quad \therefore \quad \left\{\begin{array}{l} x > \dfrac{5+y}{3} \\ x < 7+2y \end{array}\right\} \text{(B)}$$

O método mais simples para resolver o sistema A, é o que vamos expor. Tiramos o valor de x, das duas inequações do sistema A, formando com êles o sistema B.

De acôrdo com o sistema B, o *limite superior* dos valores de x é $7+2y$, e o *limite inferior*, é $\frac{5+y}{3}$. Logo, não podemos dar a y, no sistema B, *um valor qualquer*; êste valor deve ser tal que $7+2y$, **limite superior dos valores de** x, seja maior que $\frac{5+y}{3}$, **limite inferior dos valores de** x.

Portanto, os valores quaisquer que vamos dar a y, no sistema B, ficam subordinados à nova inequação que se segue:

$$7+2y > \frac{5+y}{3} \quad \text{(C)}$$

Resolvendo esta inequação, acharemos $y > -\frac{16}{5}$.

Voltando ao sistema B, façamos $y = 1$; resultará $x > 2$ e $x < 9$. Portanto, para $y = 1$, os valores inteiros de x, que verificam as inequações do sistema A, são 3, 4, 5, 6, 7 e 8. E o sistema A terá, portanto, em números inteiros e positivos, as soluções seguintes: 3 e 1, 4 e 1, 5 e 1, 6 e 1, 7 e 1, 8 e 1.

Voltando ao sistema B, façamos $y = 2$; resultará $x > \frac{7}{3}$ e $x < 11$. E teremos, em números inteiros e positivos, um novo grupo de soluções para o sistema A, a saber: 3 e 2, 4 e 2, 5 e 2, 6 e 2 ...... 10 e 2.

Podemos pois estabelecer a seguinte

Regra. *Para resolver um sistema,* A, *constituído por duas inequações simultâneas do primeiro grau, com duas incógnitas, tiramos o valor de* x *das duas inequações; com os dois limites assim obtidos formamos um novo sistema,* B, *e uma inequação,* C. *Em seguida, resolvemos esta inequação. Dando um valor conveniente a* y, *isto é, de acôrdo com a inequação* C, *o sistema* B *nos dirá quais os valores convenientes para* x. *Com o valor dado a* y, *na inequação* C,

e cada um dos valores de x, dado pelo sistema B, formaremos **um grupo de soluções do sistema A.** *E fazendo variar y, sempre de acôrdo com a inequação C, obteremos* **uma infinidade de grupos de soluções do sistema A.**

Exercício. *Quais são os números inteiros e positivos que satisfazem o sistema* A?

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+2y > 30 \\ 4x-3y < -20 \end{array}\right\} \quad (A) \qquad \left\{\begin{array}{l} x > \dfrac{30-2y}{3} \\ x < \dfrac{3y-30}{4} \end{array}\right\} \quad (B)$$

$$\frac{3y-20}{4} > \frac{30-2y}{3} \quad (C) \qquad y > 10\frac{10}{17} \quad (D)$$

De acôrdo com as inequações D e B, teremos:

$$\text{I} \;\; y=11 \left\{\begin{array}{l} x > 2\frac{2}{3} \\ x < 3\frac{1}{4} \end{array}\right\} \qquad \text{III} \;\; y=13 \left\{\begin{array}{l} x > 1\frac{1}{3} \\ x < 4\frac{3}{4} \end{array}\right\} \qquad \text{V} \;\; y=15 \left\{\begin{array}{l} x > 0 \\ x < 6\frac{1}{4} \end{array}\right\}$$

$$\text{II} \;\; y=12 \left\{\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 4 \end{array}\right\} \qquad \text{IV} \;\; y=14 \left\{\begin{array}{l} x > \frac{2}{3} \\ x < 5\frac{1}{2} \end{array}\right\} \qquad \text{VI} \;\; y=16 \left\{\begin{array}{l} x > -\frac{2}{3} \\ x < 7 \end{array}\right\}$$

E assim por diante. Portanto, as soluções, em números inteiros e positivos, do sistema A, são:

(I) 3 e 11; (II) 3 e 12; (III) 2 e 13, 3 e 13, 4 e 13; (IV) 1 e 14, 2 e 14, 3 e 14, 4 e 14, 5 e 14; (V) 1 e 15, 2 e 15, 3 e 15, 4 e 15, 5 e 15, 6 e 15; (VI) 0 e 16, 1 e 16, 2 e 16, 3 e 16, 4 e 16, 5 e 16, 6 e 16, etc..

Do exposto se vê que é fácil determinar mais soluções do sistema A, soluções estas cujo número é infinito.

27. Um artifício de cálculo. Consideremos a inequação seguinte:

$$\frac{x-3}{x-2} > 0 \qquad (A)$$

Não podemos multiplicar ambos os membros desta inequação por $x-2$, *afim de eliminar o denominador.* Com efeito, se o binômio $x-2$ contém uma incógnita, não sabemos qual o sinal dêste binômio e, por conseqüência, qual o sentido da inequação que resultará, se multiplicarmos ambos os membros da inequação A por $x-2$. (§ 22, III e IV)

Recorremos então ao seguinte artifício: multiplicamos ambos os membros da inequação A por $(x-2)^2$, *quantidade essencialmente positiva*, e divisível por $x-2$. E resulta:

$$\frac{(x-3)(x-2)(x-2)}{x-2} > 0 \quad \therefore \quad (x-3)(x-2) > 0 \qquad (B)$$

Agora vamos resolver a desigualdade B. Os valores de x devem ser tais que o produto $(x-3)(x-2)$ seja positivo. Mas êste produto é constituído por dois fatores e, para que um produto de dois fatores seja positivo é necessário e suficiente que:

a) os dois fatores sejam positivos.

b) os dois fatores sejam negativos.

Então a inequação B se desdobra em dois sistemas, a saber:

$$\left\{\begin{array}{l} x-3>0 \\ x-2>0 \end{array}\right\} \therefore \left\{\begin{array}{l} x>3 \\ x>2 \end{array}\right\} \therefore \; x>3 \qquad \left\{\begin{array}{l} x-3<0 \\ x-2<0 \end{array}\right\} \therefore \left\{\begin{array}{l} x<3 \\ x<2 \end{array}\right\} \therefore \; x<2$$

Portanto, a inequação A será verificada por qualquer número maior que 3 ou menor que 2.

Exercício I. Resolver a inequação $x^2+5x-24>0$.

Embora esta inequação seja do segundo grau, já temos recursos para resolvê-la. (E.M.T.V. § 56, V) Fatorando o 1.º membro teremos:

$$(x+8)(x-3) > 0 \quad \therefore$$

$$\left\{\begin{array}{l} x+8>0 \\ x-3>0 \end{array}\right\} \therefore \left\{\begin{array}{l} x>-8 \\ x>3 \end{array}\right\} \therefore \; x>3 \qquad \left\{\begin{array}{l} x+8<0 \\ x-3<0 \end{array}\right\} \therefore \left\{\begin{array}{l} x<-8 \\ x<3 \end{array}\right\} \therefore \; x<-8$$

Resposta. A inequação dada é verificada para qualquer valor de x maior que 3 ou menor que -8.

Exercício II. Resolver a inequação $\frac{2x+5}{x-1}+2>0$.

Somando .... $\frac{2x+5+2x-2}{x-1}>0 \therefore \frac{4x+3}{x-1}>0$

Multiplicando por $(x-1)^2$ .... $\frac{(4x+3)(x-1)^2}{x-1}>0$

Simplificando....................... $(4x+3)(x-1)>0$

Desdobrando .... $\begin{Bmatrix} 4x+3>0 \\ x-1>0 \end{Bmatrix}$ ou $\begin{Bmatrix} 4x+3<0 \\ x-1<0 \end{Bmatrix}$

$\begin{Bmatrix} x>-\frac{3}{4} \\ x>1 \end{Bmatrix} \therefore \boldsymbol{x>1}$ | $\begin{Bmatrix} x<-\frac{3}{4} \\ x<1 \end{Bmatrix} \therefore \boldsymbol{x<-\frac{3}{4}}$

Resposta. Na inequação dada, x pode receber qualquer valor maior que 1 ou menor que $-\frac{3}{4}$.

Exercícios. Série XVIII

Determinar os valores inteiros e positivos de x, que verificam as inequações seguintes:

1. $\frac{x+7}{x+3}>0$
2. $\frac{x-9}{x-2}>0$
3. $\frac{x+5}{x-5}>0$
4. $\frac{2x-1}{x+3}>0$
5. $\frac{3x+2}{2x-3}>0$
6. $\frac{4x-1}{3x-5}>0$
7. $\frac{x+10}{x+1}<0$
8. $\frac{x-1}{x-10}<0$
9. $\frac{2x+8}{2x-5}<0$
10. $\frac{x+3}{x-5}+3>0$
11. $\frac{2x-1}{x-4}-5>0$
12. $\frac{x-3}{x-6}-2<0$
13. $\frac{3x+1}{2x-5}+3<0$
14. $x^2+9x+14>0$
15. $x^2+10x+21<0$
16. $x^2+3x-28<0$

CAPÍTULO III

Problemas do Primeiro Grau

28. Observações preliminares. Consideremos o problema seguinte:

Moços e moças estão realizando um convescote. São ao todo 43 pessoas, e a diferença entre o número de moços e o de moças é **11.** *Quantos são os moços e quantas são as moças?*

Observação. Preliminarmente, a classe resolverá êste problema pela Aritmética e ficará sabendo que os moços são 27, e as moças, 16.

Em primeiro lugar, é necessário observar que o número de moços, assim como o de moças, não pode ser qualquer. Se dissermos que os moços são 25 e as moças 18, o número total de moços e moças será 43, como o exige o problema; mas a diferença entre êstes dois números é 7, *não é* 11; ora, o problema proposto exige que esta diferença seja 11 e não 7. Em resumo, o número de moços e o de moças devem preencher, de acôrdo com o problema proposto, *duas condições distintas:*

a) **primeira condição**: *sua soma deve ser* **43.**

b) **segunda condição**: *sua diferença deve ser* **11.**

Mas o estudante não perde tempo em examinar estas duas condições e vai logo dizendo que os moços são x e as moças, $43-x$, *em virtude da primeira condição.* Chegando, porém, a êste ponto, é comum, entre os principiantes, o êrro seguinte:

Se os moços são x, as moças 43 − x, e a soma 43, conclue-se que:

$$\begin{aligned} x+(43-x) &= 43 \\ x+43-x &= 43 \\ x-x &= 43-43 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

E ficam perplexos. Onde está x? perguntam êles. E desanimam, achando que o problema é difícil!

Observemos, em primeiro lugar, que êles não souberam resolver a equação que armaram; esta deveria ser resolvida assim:

$$\begin{aligned} x + (43 - x) &= 43 \\ x + 43 - x &= 43 \\ x - x &= 43 - 43 \\ 0x &= 0 \end{aligned}$$

Chegamos assim à equação **0x = 0.** Ora, neste caso particular, **a raiz da equação é um número qualquer.** Com efeito, *seja qual for o valor de x, teremos sempre* $0 \times x = 0$.

Portanto, a equação $0x = 0$ é indeterminada (**E.M.T.V. § 76, 4.ª hipótese**) e podemos atribuir a x um valor qualquer.

Então o senhor conclue que o número de moços é qualquer?! pergunta um estudante ao professor.

Não, não é qualquer. Vamos resolver êste problema como deve ser resolvido. A primeira condição serviu para *dizer, de um modo provisório*, quantos são os moços e quantas são as moças. Feito isto, *para armar a equação, é necessário recorrer a uma outra condição qualquer* e que, no nosso caso, é a segunda. E escreveremos:

$$\begin{aligned} x - (43 - x) &= 11 \\ x - 43 + x &= 11 \\ x + x &= 11 + 43 \\ 2x &= 54 \\ x &= 27 \end{aligned}$$

Portanto, sendo x o número de moços e $43 - x$, o de moças, segue-se que os moços são 27 e as moças $43 - 27$, isto é, 16.

Para por um problema em equação, é necessário prestar muita atenção ao seguinte:

Para resolver com **uma equação,** *um problema que tem* **duas incógnitas,** *estas devem preencher duas condições distintas; então recorremos a uma destas condições para dizer, de um modo provisório, qual o valor de cada uma das incógnitas, e depois recorremos à outra condição para armar a equação.*

Voltando ao nosso problema, podêmos recorrer à segunda condição para dizer qual o valor provisório de cada uma das incógnitas: os moços são x e as moças são $x - 11$. Então recorremos à primeira condição para armar a equação.

$$\begin{aligned} x + (x - 11) &= 43 \\ x + x - 11 &= 43 \\ x + x &= 43 + 11 \\ 2x &= 54 \\ x &= 27 \end{aligned}$$

Portanto, sendo x o número de moços e $x - 11$ o de moças, segue-se que os moços são 27 e as moças $27 - 11$, isto é, 16.

29. Problemas do primeiro grau com uma incógnita. Em um problema qualquer figuram sempre quantidades conhecidas e quantidades desconhecidas; as primeiras são chamadas os *dados* do problema, e as segundas, as *incógnitas*. Entre os dados e

as incógnitas há certas *relações* mencionadas no problema; *chama-se* **enunciado** *do problema, a tradução, em linguagem vulgar, das* **relações** *existentes entre os* **dados** *e as* **incógnitas** *que figuram no mesmo problema.*

A resolução algébrica de um problema se divide em três partes, distintas e sucessivas:

a) *Por o problema em equação.*
b) *Resolver a equação (ou as equações).*
c) *Interpretar as raízes (ou as soluções).*

A primeira parte é a mais difícil, não havendo regras gerais para êsse fim. Aprendemos a por um problema em equação, fazendo númerosos exercícios.

Entretanto, em muitos problemas, a questão se simplifica, obedecendo à regra estabelecida por Newton, para por um problema em equação:

Representam-se as incógnitas por **x, y, z,** . . . *e se escrevem, em linguagem algébrica, isto é, com os símbolos algébricos, as relações existentes entre as incógnitas e os dados do problema.*

Conforme o número de incógnitas, o problema será com uma, duas, três, ... n incógnitas.

30. Resolução de alguns problemas. I. *A metade de um número, aumentada de 10, é igual à quinta parte do mesmo número aumentada de 34. Qual é o número?*

Na resolução dêste problema não há dificuldade, quer para escolher a incógnita, quer para armar a equação. O número pedido é x, e *traduzindo o enunciado do problema em linguagem algébrica*, teremos:

$$\frac{x}{2} + 10 = \frac{x}{5} + 34 \quad \therefore \quad x = 80$$

O número pedido é 80. Observemos que a equação resultante do problema dado é do primeiro grau; diremos então que *o problema é do primeiro grau, porque a equação necessária para resolvê-lo é do primeiro grau.*

II. *Um pai tem 30 anos e seu filho, 2. Quantos anos deverão decorrer para que a idade do pai seja igual a 8 vêzes a do filho?*

Êste problema também se resolve facilmente. Tomando como incógnita o número de anos que deverão decorrer para que a idade do pai seja igual a 8 vêzes a do filho, diremos:

Deverão decorrer **x** anos; *então o pai terá* **30+x**, *o filho terá* **2+x** e, de acôrdo com o *enunciado* do problema,

$$30 + x = 8(2 + x)$$

E está armada a equação; resolvendo-a, acharemos **x=2**, isto é, deverão decorrer 2 anos para que a idade do pai seja igual a 8 vêzes a do filho.

III. *Determinar uma fração igual a* $\frac{2}{3}$ *e cuja soma dos têrmos seja igual a* 80.

Qual é a incógnita? A fração $\frac{2}{3}$ é irredutível; portanto, *para determinar uma fração igual a* $\frac{2}{3}$, *é necessário multiplicar-lhe ambos os têrmos por um mesmo número.* **Eis a incógnita:** *é o número pelo qual devemos multiplicar ambos os têrmos da fração.* Representando a incógnita por x, e multiplicando ambos os têrmos da fração por x, teremos $\frac{2x}{3x}$. E, de acôrdo com o enunciado do problema,

$$2x + 3x = 80 \therefore 5x = 80 \therefore x = 16$$

E a fração pedida é $\frac{32}{48}$, como é fácil de verificar.

IV. *Dividir* 100 *em duas partes tais que o dôbro da primeira seja igual a dois terços da segunda.*

Êste problema tem duas incógnitas; entretanto, vamos resolvê-lo com uma única equação. (§ 28) Seja x a primeira parte; a segunda será $100 - x$; e o dôbro de x, devendo ser igual a dois terços de $100 - x$, teremos:

$$2x = \frac{2(100 - x)}{3}$$
$$6x = 200 - 2x$$
$$8x = 200$$
$$x = 25$$

Uma das partes é 25, e a outra, 75.

V. *Determinar dois números cuja soma é* 53 *e cuja diferença é* 13.

Temos neste problema *duas incógnitas;* com efeito, precisamos determinar *dois números* cuja soma é 53 e cuja diferença é 13. Tomemos como incógnita um dos números que queremos determinar, por exemplo, o maior; *seja* **x** *o número maior.* De acôrdo com uma das condições do problema, por exemplo, *a condição diferença, o número menor será* **x – 13.** E recorrendo *à condição soma* para armar a equação, teremos:

$$x + (x - 13) = 53$$
$$2x - 13 = 53$$
$$2x = 66$$
$$x = 33$$

O número maior é 33 e o menor é 33 – 13, isto é, 20. Com efeito, 33+20 = = 53 e 33 – 20 = 13.

VI. *Um número tem* 2 *algarismos cuja soma é* 11. *Somando* 45 *a êste número, o resultado é o mesmo número escrito em ordem inversa. Qual é o número?*

Seja x êste número. Somando ao número x, 45 unidades, resultará o número x, escrito em ordem inversa!... Mas, como escrever x em ordem inversa?!... Não é necessário continuar; fomos desastrados na escolha da incógnita.

Recomecemos. O número que queremos determinar é constituído de 2 algarismos; vamos tomar como incógnita o algarismo das unidades; seja x êste algarismo. Então o algarismo das dezenas será $11 - x$. Ora, lembrando que o valor relativo do algarismo das dezenas é igual ao seu valor absoluto, multiplicado por 10, concluímos que o número que queremos determinar é $10(11 - x) + x$. Diz o nosso problema que, somando 45 unidades a êste número, obtém-se o mesmo número, porém escrito em ordem inversa. Isto quer dizer que o número resultante é o número primitivo com os algarismos trocados. Portanto,

$$10(11 - x) + x + 45 = 10x + (11 - x)$$

Resolvida esta equação, verificamos que $x = 8$. Logo, o algarismo das dezenas é $11 - 8$, isto é, 3. O número pedido é 38, e $38 + 45 = 83$.

31. As soluções negativas. Resolvendo um problema, acontece, às vêzes, que a raiz da equação correspondente a êste problema *é um número negativo.* Como explicar êste resultado? Algumas vêzes esta raiz negativa é um verdadeiro *resultado singular.* Mas, em outras, ela pode ser facilmente interpretada. E' o que acontece quando se pede um *tempo*, uma *distância*, um *lucro*, uma *temperatura*, etc., enfim, quando a incógnita representa uma grandeza que pode ser contada em dois sentidos opostos. Vamos exemplificar.

I. *Um pai tem* 40 *anos e seu filho,* 12. *Quantos anos deverão decorrer para que a idade do pai seja oito vêzes a do filho?*

Deverão decorrer x anos; o pai terá $40 + x$, o filho $12 + x$, e, de acôrdo com o enunciado do problema, teremos:

$$\begin{aligned} 40 + x &= 8(12+x) \\ 40 + x &= 96 + 8x \\ -7x &= 56 \\ 7x &= -56 \\ x &= -8 \end{aligned}$$

Deverão decorrer -8 anos! Eis um resultado singular: deverão decorrer *menos 8 anos*! Mas a interpretação é rápida, é quasi instantânea; os nossos jovens alunos gritam em côro: «*Isto aconteceu há oito anos*»!

E os estudantes têm razão. O tempo é uma grandeza que se pode contar em dois sentidos: por exemplo, *do presente para o futuro e do presente para o passado.*

No problema que acabámos de resolver, perguntámos *quantos anos deverão decorrer...* etc.. Portanto, ficou automàticamente estabelecido que o tempo será considerado *positivo*, do presente para o futuro, e *negativo*, do presente para o passado.

E diremos que o problema proposto é *impossível*. Mas, em se tratando do *tempo*, *a impossibilidade é relativa*. Com efeito, modifiquemos o problema, nas seguintes condições:

Um pai tem 40 *anos, e seu filho,* 12. ***Há*** *quantos anos a idade do pai foi igual a* 8 *vêzes a idade do filho?*

Modificando assim o problema, isto é, perguntando *há quantos anos a idade do pai foi igual...* etc., fica automàticamente estabelecido que o tempo será considerado *positivo*, do presente para o passado, e *negativo*, do presente para o futuro.

Foi há x anos; o pai tinha $40 - x$, o filho $12 - x$ e, de acôrdo com o enundiado do problema...

$$\begin{aligned} 40 - x &= 8(12 - x) \\ 40 - x &= 96 - 8x \\ 7x &= 56 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Obtivemos para x um valor positivo: $x = 8$. Portanto, o fato se deu realmente há 8 anos.

II. *Qual é o número que devemos somar aos dois têrmos da fração* $\frac{11}{15}$ *para que a fração resultante seja* $\frac{5}{9}$?

Seja x êste número; a equação do problema será:

$$\begin{aligned} \frac{11 + x}{15 + x} &= \frac{5}{9} \\ 99 + 9x &= 75 + 5x \\ 4x &= -24 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

O número que devemos *somar* aos dois têrmos da fração $\frac{11}{15}$, para que ela se torne igual a $\frac{5}{9}$ é -6 (menos 6). Neste caso a solução negativa dispensa interpretação,

porque somar -6 consiste em subtrair 6. Entretanto, se os estudantes querem achar para x um valor positivo, é bastante resolver novamente o problema, substituindo a palavra *somar* pela palavra *diminuir*.

Em resumo, uma solução negativa significa que o problema é impossível. *Esta impossibilidade é relativa*, quando a incógnita é uma grandeza que pode ser contada em dois sentidos opostos, isto é, quando *a grandeza admite* **oposição de sentido;** é o caso dos *tempos, distâncias, temperaturas, lucros e perdas*, etc.. Neste caso, modificamos o enunciado do problema de modo que *a nova pergunta do mesmo problema seja justamente o contrário da pergunta primitiva.* Por exemplo, em lugar de perguntar *quantos anos deverão decorrer para que*, etc., perguntaremos *há quantos anos;* em lugar de perguntar *a que distância do ponto A se encontrarão...* perguntaremos *a que distância do ponto A se encontraram*, etc..

Quando a incógnita é uma grandeza que não admite *oposição de sentido*, a solução negativa indica a *impossibilidade absoluta* de resolver o problema. E' o que vamos ver no problema seguinte.

III. *Vinte pessoas, homens e mulheres, alugaram um vagão de uma estrada de ferro, por* 124 *cruzeiros. Cada homem contribuiu com* 5 *cruzeiros e cada mulher com* 3 *cruzeiros. Quantos eram os homens e quantas as mulheres?*

Representando por x o número de homens, o de mulheres será $20 - x$. Os x homens contribuiram com $5x$ e as $20 - x$ mulheres contribuiram com $3(20 - x)$. E a despesa total tendo sido de 124 cruzeiros, temos de resolver a seguinte equação:

$$\begin{aligned} 5x + 3(20 - x) &= 124 \\ 5x + 60 - 3x &= 124 \\ 2x &= 64 \\ x &= 32 \end{aligned}$$

Os homens eram 32. Portanto, as mulheres eram $20 - 32$, isto é, -12. As mulheres eram *menos* **doze.** Eis uma solução negativa que absolutamente não pode ser interpretada, porque o número de mulheres não admite *oposição de sentido*. Neste caso, a *solução negativa* indica *impossibilidade absoluta* de se resolver o problema; o problema é absurdo.

32. As soluções fracionárias. *Os alunos da primeira série ginasial, em número de* 36, *resolveram fazer uma excursão a uma cidade próxima. Os bilhetes para a excursão importavam em* 155 *cru-*

zeiros. Ficou estabelecido que os meninos pagariam 5 cruzeiros e as meninas, 2. Quantos eram os meninos e quantas as meninas?

Seja x o número de meninos; o de meninas será $36 - x$. Os meninos contribuiram com $5x$, as meninas com $2(36 - x)$; e a importância total dos bilhetes sendo Cr.\$155,00, teremos:

$$\begin{aligned} 5x + 2(36 - x) &= 155 \\ 5x + 72 - 2x &= 155 \\ 3x &= 83 \\ x &= 27\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Portanto, devendo ser $x = 27\frac{2}{3}$ o número de meninos, segue-se que o problema é absurdo, pois a sua solução deveria ser um número positivo e *inteiro*.

Assim um problema é impossível quando exige que a raiz da equação seja um número inteiro, e esta se apresenta fracionária.

33. O infinito nos problemas. Às vêzes, um problema dado nos conduz a uma equação cuja raiz é o infinito. Neste caso o problema é geralmente impossível. Como exemplo, vamos resolver o seguinte problema:

De $\frac{2}{3}$ *do meu dinheiro, subtraindo* 10, *restam* $\frac{1}{5}$ *mais* $\frac{7}{15}$ *do meu dinheiro. Quanto tenho?* Seja x o meu dinheiro.

$$\begin{aligned} \frac{2x}{3} - 10 &= \frac{x}{5} + \frac{7x}{15} \\ 10x - 150 &= 3x + 7x \\ 10x - 3x - 7x &= 150 \;\therefore \\ 0x &= 150 \\ x &= \infty \end{aligned}$$

Neste exemplo, o símbolo ∞ indica a impossibilidade de resolver o problema. (E.M.T.V. § 76) Com efeito, reduzindo as frações do problema dado, ao mesmo denominador, teremos $\frac{10x}{15} - 10 = \frac{3x}{15} + \frac{7x}{15} \;\therefore\; \frac{10x}{15} - 10 = \frac{10x}{15} \;\therefore\; -10 = 0$, e a impossibilidade se torna evidente.

Em resumo: um problema é impossível quando:

a) *Tem como solução o infinito.*

b) *Tem como solução um número fracionário e os dados do problema exigem como solução um número inteiro.*

c) *Tem como solução um número negativo.* (§ 31, II)

34. Problemas indeterminados. Já resolvemos um problema indeterminado. (§ 3) Aprendemos também que:

$$\frac{0}{0} = n \text{ (um número qualquer)} \quad \text{(E.M.T.V. § 76)}$$

A expressão $\frac{0}{0}$ é chamada, em Matemática, o *símbolo da indeterminação*. Esta expressão aparece sempre que o problema não tem condições suficientes para ser resolvido. Por exemplo:

Tenho canários e sabiás, ao todo 50 aves. Quantos são os canários e quantos os sabiás?

Seja x o número de canários; o de sabiás será $50 - x$. E, visto que o nosso problema contém sòmente uma condição, não há remédio senão escrever:

$$\begin{aligned} x + (50 - x) &= 50 \\ x + 50 - x &= 50 \\ x - x &= 50 - 50 \\ 0x &= 0 \\ x &= \frac{0}{0} \end{aligned}$$

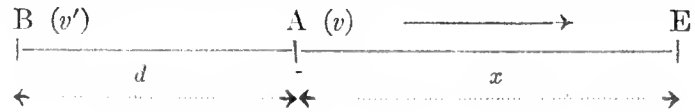
Portanto, sendo x o número de canários, êstes podem ser 3, 4, 8, 15, 23, etc.. Com efeito, se o problema diz que canários e sabiás são ao todo 50, e *nada mais*, é claro que podemos ter 20 canários e 30 sabiás, ou 24 canarios e 26 sabiás, ou 28 canários e 22 sabiás, etc..

Diz-se então, em Matemática, que *o problema é indeterminado*.

Um problema é, geralmente, indeterminado, quando o número de incógnitas é maior que o número de condições distintas que os valores destas incógnitas devem preencher.

35. O problema dos correios. E' um problema tradicional em Álgebra. E' assim chamado porque, no tempo em que os matemáticos o formularam, não havia trens e, muito menos, automóveis. A correspondência era transportada de uma cidade a outra por homens que se chamavam *correios* e que faziam o transporte da correspondência, a cavalo.

Dois correios A *e* B *estão percorrendo a mesma estrada, e no mesmo sentido. Suas velocidades respectivas são* **v** *e* **v'**. *Em um momento dado* (por exemplo, ao meio-dia) *a distância que os separa é* **d**.. *Em que ponto da estrada os dois correios se encontrarão?*



Vamos resolver êste problema com uma incógnita. Seja x o caminho percorrido pelo correio A, até o ponto de encontro; então o caminho percorrido pelo correio B será $x + d$.

Seja t o tempo necessário ao correio A para percorrer o caminho x, e t' o tempo necessário ao correio B para percorrer o caminho $x + d$; *sendo o têmpo igual ao espaço dividido pela velocidade*, (E.M.S.V. § 26) teremos:

$$t = \frac{x}{v} \qquad t' = \frac{x+d}{v'}$$

Mas êstes dois tempos são evidentemente iguais; logo,

$$\frac{x}{v} = \frac{x+d}{v'}$$

$$xv' = xv + dv$$
$$xv' - xv = dv$$
$$x(v' - v) = dv$$
$$x = \frac{dv}{v' - v}$$

A equação $x = \dfrac{dv}{v' - v}$ é uma fórmula, que vamos *discutir*. Discutir uma fórmula é atribuir às letras que nela entram todos os valores possíveis, e interpretar os resultados obtidos.

A discussão desta fórmula será dividida em duas partes.

Primeira parte: $d \neq$ zero

I. Suponhamos $v' > v$. Neste caso, acharemos para x um valor, e sòmente um, inteiro, ou fracionário, mas *positivo*. E o correio B alcançará o correio A.

II. Suponhamos $v' = v$. Neste caso, teremos:

$$x = \frac{dv}{v' - v} \;\therefore\; x = \frac{dv}{0} \;\therefore\; x = \infty$$

O infinito é o símbolo da impossibilidade. (§ 33) Neste caso, o correio B nunca alcançará o correio A, o que é evidente, porque A está na frente, e ambos caminham com a mesma velocidade.

III. Suponhamos $v' < v$. Neste caso, acharemos para x um valor, e sòmente um, inteiro ou fracionário, mas *negativo*. A solução negativa indica, neste caso, *uma impossibilidade relativa*. Com efeito, modificando a pergunta do problema, isto é, *perguntando em que ponto da estrada os dois correios se tinham encontrado*, obteremos facilmente

$$x = \frac{dv}{v - v'}$$

solução esta que, podendo ser inteira ou fracionária, é, entretanto, *positiva* porque, no caso presente, temos $v > v'$.

Segunda parte: $d =$ zero

I. Suponhamos $v' > v$. O numerador de x é nulo, mas o denominador é diferente de zero; logo, $x = 0$. Com efeito, se os dois correios estão juntos num momento dado, por exemplo, no ponto A, e se caminham com velocidades diferentes, é claro que o encontro se realiza no próprio ponto A. Logo, a distância entre o ponto A e o ponto de encontro é nula.

II. Suponhamos $v' = v$. Neste caso, teremos:

$$x = \frac{dv}{v' - v} \;\therefore\; x = \frac{0 \times v}{v' - v} \;\therefore\; x = \frac{0}{0}$$

Ora, $\frac{0}{0}$ é o símbolo da indeterminação. (§ 34) Neste caso, o problema é indeterminado. Com efeito, se os dois correios estão juntos em um momento dado, por exemplo, no ponto A, e se caminham com velocidades iguais, é claro que estarão sempre juntos; *o valor de x é qualquer*.

III. Suponhamos $v' < v$. Como no primeiro caso, teremos $x = 0$. O denominador de x será negativo, mas **zero** *dividido por mais ou menos um número qualquer* **n** *é igual a* **zero.**

A fórmula $x = \dfrac{dv}{v' - v}$ permite resolver todos os problemas análogos ao problema dos correios. No caso em que os dois correios caminham um ao encontro do outro, é bastante escrever $v + v'$, em lugar de $v' - v$, como os estudantes podem facilmente verificar.

Exercícios. Série XIX (*)

Resolver os seguintes problemas, com uma incógnita:

1. Determinar dois números tendo por soma 3,7 e por diferença 0,6.

2. Determinar duas frações tendo por soma $3\frac{1}{5}$ e por diferença $\frac{3}{4}$.

3. Dividir 40 em duas partes tais que cinco vêzes a primeira mais três vêzes a segunda seja igual a 184.

4. Repartir 50 laranjas em duas porções tais que a diferença entre o triplo da primeira e o quádruplo da segunda seja 38.

5. Determinar duas frações cuja soma seja 1.

6. Tenho Cr.\$225,00 em notas de Cr.\$20,00 e de Cr.\$5,00. O número total delas é 30. Quantas são as notas de Cr.\$20,00 e as de Cr.\$5,00?

(*) Convém ler a Nota da pág. 271.

7. Dividir 120 em duas partes tais que 10 vêzes a maior seja igual a 14 vêzes a menor.

8. Quais são as dimensões de um retângulo cujo perímetro mede 300 metros?

9. Um pai tem 40 anos e seu filho, 8. Quantos anos deverão decorrer para que a idade do pai seja o triplo da do filho?

10. Em 1920 um pai tinha 26 anos e seu filho, 2. Decorreram alguns anos e a idade do pai tornou-se o quíntuplo da do filho. Em que ano se verificou êste fato e qual era então a idade de cada um?

11. Um terreno retangular mede 35m por 18m. Se aumentarmos 5m no comprimento, de quanto devemos diminuir a largura, para que o perímetro do terreno não varie?

12. Antônio e Carlos têm a mesma quantia. Se Carlos der Cr.$5,00 a Antônio, então o triplo do dinheiro de Antônio será igual a 11 vêzes o dinheiro de Carlos. Quanto tem cada um dos meninos?

13. O triplo de um número excede 50, tanto quanto 40 excede o dôbro dêsse mesmo número. Qual é o número?

14. A diferença entre o excesso de um número sôbre 50 e o excesso de 80 sôbre êsse mesmo número é 10. Qual é o número?

15. Contratei um empregado por Cr.$150,00 mensais e uma gratificação, no fim do ano, de um terno de roupa. Ao cabo de 7 meses tive de despedí-lo e dei-lhe, então, Cr.$827,50 e o terno. Quanto paguei pelo terno?

16. Quero socorrer alguns pobres. Faltam-me Cr.$15,00 para dar Cr.$5,00 a cada um; entretanto, se eu der Cr.$1,00 menos a cada um dêles, sobrar-me-ão Cr.$8,00. Quanto tenho e quantos são os pobres?

17. Eu tenho 50 anos e meus três sobrinhos têm juntos 42 anos. Quantos anos deverão decorrer para que a minha idade seja igual à soma das idades dos meus sobrinhos?

18. Comprei 30 sacas de café, tipos 3 e 4, e paguei Cr.$4 140,00. O tipo 3 custou Cr.$150,00 a saca e o tipo 4, Cr.$120,00. Quantas sacas de cada tipo comprei?

19. Dividir o número 166 em 4 partes, de modo que o excesso da primeira sôbre a segunda seja 4; sôbre a terceira, 12; sôbre a quarta, 18.

20. Tenho um certo número de ameixas; se me derem mais 24, então o número de ameixas excederá 80, tanto quanto 80 excede o número primitivo de ameixas. Quantas ameixas tenho?

21. Comprei 30m de sêda e 40m de fôrro por Cr.$1 280,00. Sendo o preço de um metro de sêda igual a 4 vêzes o preço de um metro de fôrro, pergunta-se qual o preço do metro de cada fazenda.

22. Conheço seis irmãos, cada um dos quais tem 3 anos mais do que o outro, isto é, A tem 3 anos mais que B, B tem 3 anos mais que C, etc.. A idade do mais velho é igual a dez sétimos da idade do mais moço. Qual é a idade de cada um dos seis irmãos?

23. Contratei um empregado por Cr.$80,00 mensais e prometí-lhe um relógio ao cabo de um ano de serviço. Tendo sido obrigado a despedí-lo depois de 8 meses e meio, dei-lhe Cr.$637,50 e o relógio. Qual era o preço do relógio?

24. Dividir 120 em duas partes tais que a maior seja igual à menor mais 32.

25. Dividir 80 em duas partes tais que a diferença entre a maior e o triplo da menor seja 12.

26. Dividir 72 em duas partes tais que a maior seja igual a 4 vêzes a menor mais 3.

27. Um pai tem 50 anos e seus três filhos têm respectivamente 22, 21 e 19 anos. Há quantos anos a idade do pai era igual à soma das idades dos três filhos?

28. Um empregado ganha Cr.$15,00 por dia, mas é obrigado a pagar uma multa de Cr.$4,00 quando não comparece ao escritório. Ao cabo de 60 dias recebe Cr.$729,00. Quantos dias trabalhou?

29. A, B, C e D receberam Cr.$175,00. A e B receberam Cr.$77,00; A e C, Cr.$83,00; A e D, Cr.$85,00. Quanto recebeu cada um?

30. Tenho pêssegos, maçãs e peras, ao todo 96 frutas. O número de maçãs é o triplo do de pêssegos, e as peras são tantas quantos são os pêssegos e maçãs reunidos. Quantas frutas de cada espécie tenho?

31. A diferença entre dois números é 4; a diferença entre o quíntuplo do menor e o triplo do maior é 10. Quais são os dois números?

32. Um negociante tem duas qualidades de vinho; uma custa Cr.$2,00 o litro e a outra, Cr.$3,60. Quer fazer uma mistura de 80 litros e de modo que cada litro da mistura custe Cr.$3,20. Quantos litros de cada vinho deve misturar?

33. Dividir o número 60 em duas partes tais que um sétimo de uma seja igual a um oitavo da outra.

34. Repartir 55 laranjas em duas porções tais que um quarto da primeira, mais cinco sextos da segunda seja igual a 40.

35. Quatro meninos receberam uma certa quantia. O primeiro recebeu Cr.$35,00; o segundo, o terceiro e o quarto receberam, respectivamente, um nono, três oitavos e cinco doze avos da quantia distribuída. Quanto recebeu cada um?

36. A diferença entre dois números é 495, o quociente incompleto é 4, e o resto da divisão é 60. Quais são os dois números?

37. Três retalhos de fazenda medem juntos 15,7m. O primeiro tem 3,1m mais do que o segundo; êste tem 1,5m mais que o terceiro. Quanto mede cada retalho?

38. Tenho galinhas e coelhos, ao todo 77 cabeças e 238 pés. Quantas são as galinhas e quantos são os coelhos?

39. Se do dôbro da idade que meu filho tem, subtrairmos o triplo da idade que êle tinha há seis anos, resultará a sua idade atual. Qual é a idade de meu filho?

40. Um jardim quadrado é fechado com um muro cuja espessura mede 0,40m; então a área do jardim diminue de 74 metros quadrados. Calcular o lado e a área do jardim, antes da construção do muro.

41. Qual é o número cujos dois terços diminuídos de 8, eqüivalem à quarta parte do mesmo número aumentada de 7?

42. Um pai tem 30 anos mais que seu filho; dentro de 4 anos a idade do pai será o quádruplo da do filho. Qual é a idade de cada um?

43. Um banqueiro recebeu Cr.$662 000,00 em três dias; no segundo dia recebeu um décimo mais que no primeiro; e no terceiro dia um décimo mais que no segundo. Quanto recebeu em cada um dos três dias?

44. No fim de cada ano a minha fortuna aumenta de um têrço de seu valor, mas eu gasto Cr.$1 000,00 em presentes. Ao cabo de três anos a minha fortuna duplica. Qual é a fortuna inicial?

45. Transformar o número 695 em uma soma de cinco números ímpares consecutivos.

46. Determinar quatro múltiplos consecutivos de 11, tendo por soma 286.

47. Paguei Cr.$265,00 com notas de Cr.$5,00 e de Cr.$2,00. O número de notas de Cr.$2,00 excede de 17 o número de notas de Cr.$5,00. Quantas notas dei de cada espécie?

48. Um criador foi à feira para vender frangos a Cr.$4,00. Durante o caminho, porém, presenteou um amigo com 10 frangos e, não querendo ter prejuízo, resolveu vender os restantes a Cr.$4,80 cada um. Com quantos frangos saiu êle de casa?

Exercícios. Série XX

Resolver com uma incógnita os seguintes problemas:

1. Determinar 2 números cuja soma é 147 e cuja diferença é 53.

2. Determinar dois números cuja soma é 141, o quociente aproximado é 6, e o resto da divisão é 15.

3. Multiplicando um certo número por 12, somando 36 ao produto, e dividindo a soma por 56, o quociente é 78. Qual é o número?

4. Determinar dois números consecutivos tais que a soma da metade e da quinta parte do menor seja igual à soma da têrça parte e da quarta parte do maior.

5. Contratei um empregado por Cr.$300,00 mensais e a gratificação de um relógio, ao cabo de um ano. Despedí-o, porém, ao cabo de 7 meses, dando-lhe Cr.$1 950,00 e o relógio. Determinar o preço do relógio.

6. Dividir Cr.$1 350,00 entre três pessoas, de modo que a parte da segunda seja o triplo da parte da primeira, e a parte da terceira seja o dôbro da parte da segunda.

7. Dividir Cr.$400,00 entre três pessoas, de modo que a segunda receba Cr.$50,00 mais que a primeira, e a terceira receba tanto quanto as duas primeiras.

8. O quociente aproximado de 2 números é 3, o resto de sua divisão é 2, e sua diferença é 28. Quais são os dois números?

9. Calcular o comprimento e a largura de um retângulo cujo perímetro mede 208m, sendo a largura igual a $\frac{5}{8}$ do comprimento.

10. Um número é o quíntuplo do outro; diminuindo 80 unidades do maior e 8 do menor, os restos são iguais. Quais são os dois números?

11. Um pai tem 55 anos e o filho, 12. Quantos anos deverão decorrer para que a idade do pai seja o triplo da do filho?

12. Tenho galinhas e coelhos, ao todo 47 cabeças e 120 pés. Quantas galinhas e quantos coelhos tenho?

13. Pai e filho têm juntos 72 anos. A idade do filho é $\frac{2}{7}$ da do pai, Qual é a idade de cada um?

14. Um pai dizia ao filho: «Hoje tua idade é $\frac{1}{3}$ da minha; há 8 anos era $\frac{1}{5}$. Quais são as nossas idades?»

15. A soma dos dois algarismos de um número é 7; diminuindo 27 dêste número, resulta o número primitivo invertido. Determinar êste número.

16. Um número tem 2 algarismos; o das unidades é o quádruplo do das dezenas. Somando 54 unidades a êste número, resulta o mesmo número invertido. Qual é o número?

17. Determinar uma fração igual a $\frac{5}{8}$ e cuja soma dos têrmos seja 221.

18. Determinar uma fração igual a $\frac{4}{9}$ e cuja soma dos têrmos seja 169.

19. Dividir 728 em duas partes proporcionais aos números 3 e 5.

20. Dividir 385 em duas partes proporcionais aos números 4 e 7.

21. Dividir 420 em duas partes proporcionais aos números $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$.

22. Dividir 253 em duas partes proporcionais aos números $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{4}$.

23. Se dividirmos um certo número por 10 e, em seguida, dividirmos o quociente por 3, a soma dos quocientes será 100. Determinar êste número.

24. Multiplica-se um número por 9; do produto se subtrai 18; divide-se a diferença por 12; do quociente se diminue 3; resta 3. Determinar êste número.

25. Pai e filho têm juntos 80 anos. Se duplicarmos a idade do filho, êle terá 10 anos mais que o pai. Qual é a idade de cada um?

26. O dôbro de um número aumentado de 24, excede 80, tanto quanto 100 excede o número. Determinar êste número.

27. Determinar a minha idade, sabendo que, dentro de 20 anos, ela será igual ao dôbro da idade que eu tinha há 20 anos.

28. Tenho 40 anos e meu irmão tem $\frac{7}{8}$ da minha idade. Há quantos anos a idade de meu irmão era igual a $\frac{3}{4}$ da minha?

29. Um pai tem o triplo da idade do filho; há quatro anos a idade do pai era o quádruplo da do filho. Determinar as idades atuais do pai e do filho.

30. A soma dos dois algarismos de um número é 9. Se dividirmos o número pela soma de seus algarismos, o quociente será 8. Qual é o número?

31. A e B saem a passeio. A tem Cr.$100,00 e B, Cr.$48,00. A gasta duas vêzes mais que B e fica com o triplo do que restou a B. Quanto gastou cada um?

32. A e B tinham juntos Cr.$40,00. B deu Cr.$19,00 a A e êste ficou com Cr.$6,00 mais do que B. Quanto tinha cada um dêles, antes de realizarem êste negócio?

33. Eu tinha uma certa quantia. Gastei $\frac{3}{5}$ desta quantia, depois recebí Cr.$90,00, em seguida gastei $\frac{3}{4}$ do meu dinheiro, recebí Cr.$670,00, gastei $\frac{4}{7}$ do meu dinheiro, e fiquei com Cr.$360,00. Qual a quantia que eu possuía?

34. Dois estudantes têm a mesma idade. Se a idade do primeiro aumentar de 36 anos, e a do segundo, de 52, as duas idades serão proporcionais aos núneros 3 e 4. Qual é a idade dêles?

35. Um general dispõe os seus soldados em quadrado e sobram 88; entretanto, não pode por mais um soldado em cada linha, porque lhe faltam 57. De quantos soldados dispõe êste general?

36. Uma lebre, perseguida por um perdigueiro, tem 90 pulos de dianteira. Enquanto a lebre dá 5 pulos, o cão dá 4. Mas 5 pulos do cão valem 7 pulos da lebre. Quantos pulos deve dar o perdigueiro para alcançar a lebre?

37. Uma torneira enche um tanque em 8 horas, e uma outra o enche em 12 horas. Abrindo as duas torneiras ao mesmo temp, em quantas horas o tanque ficará cheio?

38. Uma torneira enche um tanque em t horas, e uma outra o enche em t' horas. Abrindo as duas torneiras ao mesmo tempo, em quantas horas o tanque ficará cheio?

Observação. O aluno, resolvendo êste problema, terá deduzido a regra para resolver todos os problemas desta espécie; *aprenderá a generalizar uma questão aritmética.* E' esta uma das vantagens da Álgebra.

39. Uma torneira enche um tanque em 15 horas e uma outra o esvazia em 20 horas. Abrindo as duas torneiras ao mesmo tempo, em quantas horas o tanque ficará cheio?

40. Uma torneira enche um tanque em t horas, e uma outra o esvazia em t' horas. Abrindo as duas torneiras ao mesmo tempo, em quantas horas o tanque ficará cheio?

Observação. Êste problema é também uma *generalização,* e constitue uma excelente oportunidade para que o professor faça com os seus alunos *um exercício de discussão de fórmulas.*

41. Um relógio marca meio-dia. A que horas seus ponteiros estarão superpostos pela segunda vez?

36 Problemas do primeiro grau com duas incógnitas. Já fizemos algumas considerações a respeito da resolução algébrica dos problemas de Matemática. Entretanto, se quisermos resolver êstes problemas, com duas incógnitas, devemos tomar algumas precauções, que vamos indicar nos exemplos que se seguem.

Primeiro exemplo. *Determinar dois números inteiros consecutivos tendo por soma* 23.

Seja x o número maior, e y o menor; portanto,

$$x + y = 23 \qquad (1)$$

Foi fácil estabelecer esta equação; o problema nos diz que a soma dos dois números deve ser 23; *esta condição está declarada no problema, está à vista, é* **uma condição explícita.** (§ 5) Ora, uma equação não basta para resolver o nosso problema; se não estabelecermos outra equação, *o problema será indeterminado.* (§ 28) Mas, como estabelecer a outra equação? Recorrendo a uma outra condição contida no mesmo problema: *os dois números devem ser inteiros consecutivos.* Cabe ao estudante saber o que são números inteiros consecutivos; e, se êle o souber, escreverá imediatamente

$$x - y = 1 \qquad (2)$$

Esta condição, *a dos dois números pedidos serem inteiros consecutivos,* não é, pois, bastante clara; exige que o estudante tenha conhecimentos de Matemática; **é uma condição implícita.**

Estabelecidas as equações (1) e (2) o resto é fácil.

Segundo exemplo. *Determinar dois ângulos complementares, tendo por diferença* 28°.

A *condição explícita* do problema é que a diferença dos ângulos é de 28°.

A *condição implícita,* isto é, a condição que o problema não nos diz, é que a soma de dois ângulos complementares é 90°. E' dever do estudante conhecer esta condição.

Representando por x o ângulo maior e por y, o menor, teremos:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 90 \\ x - y = 28 \end{array}\right\} \therefore \left\{\begin{array}{l} 2x = 118 \\ 2y = 62 \end{array}\right\} \therefore \begin{array}{l} x = 59° \\ y = 31° \end{array}$$

Observação. Os problemas que deverão ser resolvidos com duas incógnitas já foram apresentados nos §§ 10, 11 e 13.

CAPÍTULO IV

Números Irracionais

37. Números irracionais. *Se uma fração ordinária é irredutível, o quadrado desta fração é também uma fração irredutível.*

Consideremos as frações irredutíveis $\frac{4}{9}$, $\frac{14}{15}$ e $\frac{22}{15}$. Decompondo em fatores primos ambos os têrmos de cada uma destas frações e elevando-as, em seguida, ao quadrado, teremos:

$$\frac{4}{9} = \frac{2\times 2}{3\times 3} \quad \left(\frac{2\times 2}{3\times 3}\right)^2 = \frac{(2\times 2)^2}{(3\times 3)^2} = \frac{2\times 2\times 2\times 2}{3\times 3\times 3\times 3} = \frac{16}{81}$$

$$\frac{14}{15} = \frac{2\times 7}{3\times 5} \quad \left(\frac{2\times 7}{3\times 5}\right)^2 = \frac{(2\times 7)^2}{(3\times 5)^2} = \frac{2\times 7\times 2\times 7}{3\times 5\times 3\times 5} = \frac{196}{225}$$

$$\frac{22}{15} = \frac{2\times 11}{3\times 5} \quad \left(\frac{2\times 11}{3\times 5}\right)^2 = \frac{(2\times 11)^2}{(3\times 5)^2} = \frac{2\times 11\times 2\times 11}{3\times 5\times 3\times 5} = \frac{484}{225}$$

Observando as operações acima, é fácil concluir que, se os dois têrmos de uma fração não têm fator comum, elevando esta fração ao quadrado, isto é, *multiplicando cada têrmo por si mesmo*, os dois produtos resultantes não podem ter fator comum. Portanto,

Se uma fração ordinária é irredutível, o quadrado desta fração é também uma fração irredutível.

De modo análogo se provará que, quando uma fração ordinária é irredutível, qualquer potência desta fração é também uma fração irredutível.

Vamos agora mostrar que:

Uma fração imprópria e irredutível não pode ser transformada em número inteiro.

Seja $\frac{a}{b}$ uma fração imprópria e irredutível. Logo, seus têrmos são primos entre si e, além disto, temos $a > b$. A fração

$\frac{a}{b}$ não pode ser transformada em número inteiro porque, para que esta transformação pudesse ser efetuada, seria necessário que a fosse divisível por b, o que não é possível devido à hipótese; com efeito, estamos supondo que a e b são primos entre si. Por exemplo, as frações $\frac{9}{4}$, $\frac{13}{5}$ e $\frac{17}{8}$ não podem ser transformadas em números inteiros.

Teorema. *Se um número inteiro* A *não tem como raiz quadrada exata um outro número inteiro* **B**, *também não existe um número fracionário que, elevado ao quadrado, reproduza o número* A.

Consideremos, por exemplo, o número 10; não existe um número inteiro cujo quadrado seja 10.

Existirá, porventura, um número fracionário cujo quadrado seja 10? Vamos provar que êste número não existe.

Suponhamos que a raiz quadrada do número 10 é $\frac{a}{b}$, isto é:

$$\sqrt{10} = \frac{a}{b} \quad \therefore \quad \frac{a^2}{b^2} = 10 \qquad (1)$$

Ora, a igualdade (1) não pode existir. Evidentemente, a fração $\frac{a}{b}$ é uma fração imprópria ($\sqrt{10} > 3$), e que podemos supor irredutível porque, se não o fôsse, dividiríamos ambos os têrmos desta fração pelo seu máximo divisor comum.

Mas, a fração $\frac{a}{b}$ sendo irredutível, seu quadrado, isto é, a fração $\frac{a^2}{b^2}$ é também uma fração irredutível. Entretanto, já vimos que uma fração imprópria e irredutível não pode ser transformada em número inteiro; portanto, a fração $\frac{a^2}{b^2}$ não pode ser igual ao número 10, isto é, a igualdade (1) não pode existir.

De modo análogo se provará que, se um número inteiro A não tem como raiz cúbica exata um outro número inteiro B, também não existe um número fracionário que, elevado à terceira potência, reproduza o número A. Por exemplo, não existindo um número inteiro cuja terceira potência seja 20, não existe também um número fracionário cuja terceira potência seja 20. E assim por diante.

Calculando a raiz quadrada de 10, com êrro inferior a um centésimo, acharemos 3,16. (E.M.S.V. § 49)

Se calcularmos $\sqrt{10}$ com maior aproximação, isto é, com êrro inferior a 0,000 1 ou 0,000 001, acharemos, porventura, uma dízima periódica? De modo algum. Suponhamos que...

$$\sqrt{10} = 3{,}161\,616\,16.....$$

Neste caso teríamos.....

$$\sqrt{10} = 3\frac{16}{99} \text{ (E.M.P.V. § 163)} \therefore \sqrt{10} = \frac{313}{99}$$

E a raiz quadrada de 10 seria uma fração imprópria e irredutível, o que não pode ser de acôrdo com o teorema já demonstrado.

Mas, se a raiz quadrada exata de 10 não é um número inteiro, não é uma fração ordinária, não é uma fração decimal, não é uma dízima periódica, qual é, então, a natureza da raiz quadrada exata do número 10?

E' um número irracional. Procurando a raiz quadrada de 10, podemos escrever à direita dêste número uma infinidade de zeros, sem que a operação se termine; haverá sempre um resto. Podemos determinar a raiz quadrada de 10, com 15 ou 20 ou 50 algarismos decimais, mas esta raiz nunca será exata; será sempre uma raiz aproximada.

A raiz quadrada de um número inteiro, e que não é quadrado perfeito, é um número irracional; $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, etc., *são números irracionais.*

O mesmo acontece com $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[4]{20}$, $\sqrt[5]{30}$, etc.; êstes números são também *irracionais.* Portanto,

A raiz enésima de um número inteiro que não é uma enésima potência exata é um número irracional. (*)

Observação. *Raiz enésima* significa raiz de grau n. Para não dizer raiz segunda, terceira, quarta, etc., dizemos de um modo geral, *raiz enésima.*

Em oposição aos números irracionais, os números inteiros e fracionários são chamados *números racionais.*

(*) Há números irracionais, que não são a raiz enésima de um númers que não é uma enésima potência exata; por enquanto podemos citar apenao o número π. (3,141 592 6...) Tais números irracionais são números *transcendentes.*

Os números irracionais acima definidos são chamados também **radicais,** os quais são classificados pelo índice. Assim é que

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ são radicais do segundo grau.

$\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{10}$ são radicais do terceiro grau.

$\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[4]{7}$ são radicais do quarto grau.

E assim por diante.

38. Cálculo dos radicais. Consideremos a expressão aritmética seguinte:

$$\sqrt{6} \times \sqrt{10} \times \sqrt{15} \times \sqrt{28} \times \sqrt{63} \qquad \text{(A)}$$

Se quisermos calcular esta expressão com os nossos conhecimentos atuais de Matemática, teremos de extrair cinco raízes quadradas e multiplicar os resultados! Extraindo cada uma das raízes, com êrro inferior a um milésimo, teremos:

$$2{,}449 \times 3{,}162 \times 3{,}872 \times 5{,}291 \times 7{,}937 \qquad \text{(B)}$$

Imagine-se o trabalho necessário para calcular a expressão B! E êste trabalho fastidioso nos conduz a uma aproximação grosseira do valor de B; nenhum dos fatores da expressão B representa exatamente o fator correspondente da expressão A; cada fator da expressão A é um pouco maior que o fator correspondente da expressão B. Entretanto, **o cálculo dos radicais** nos permite obter o valor exato da expressão A, *sem extrair uma raiz,* e efetuando uma multiplicação muito simples, que pode mesmo ser feita mentalmente! O valor exato da expressão A é 1 260, como mostraremos adiante. (§ 51)

As operações que se realizam com os radicais são as mesmas que se realizam com os números inteiros e fracionários: *adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação* e *radiciação.*

39. Valor aritmético de um radical. Um radical do segundo grau tem dois valores distintos, sendo um positivo e outro negativo. Assim como $\sqrt{25} = \pm 5$, também $\sqrt{2} = \pm 1{,}414...$, $\sqrt{3} = \pm 1{,}732.....$, $\sqrt{5} = \pm 2{,}236.....$, $\sqrt{6} = \pm 2{,}449.....$, etc.. Entretanto, no cálculo dos radicais consideraremos sòmente o valor positivo dêstes radicais, isto é, o *valor aritmético* dêstes

radicais. Em Aritmética, o número 25 tem apenas uma raiz quadrada; é o número 5. Em Aritmética não se conhece a raiz quadrada negativa do número 25.

O valor aritmético de $\sqrt[3]{8}$ é 2, porque $2^3 = 8$; mais tarde a Álgebra nos vai revelar a existência de *outros dois números* que, elevados à terceira potência, reproduzem o número 8.

O valor aritmético de $\sqrt[4]{81}$ é 3, porque $3^4 = 81$. Entretanto, veremos mais tarde que existem *outros três números* os quais, elevados à quarta potência, reproduzem o número 81. Um dêles é o número -3 porque $(-3)^4 = 81$.

De um modo geral a Álgebra nos ensina que um radical tem tantos valores diferentes quantas unidades tem o seu índice. Por exemplo, o radical $\sqrt[5]{32}$ tem cinco valores diferentes. Entretanto, no cálculo dos radicais, nós consideraremos sòmente o valor aritmético de cada radical. E diremos que:

$$\sqrt{25} = 5; \qquad \sqrt[3]{64} = 4; \qquad \sqrt[4]{81} = 3; \qquad \sqrt[5]{32} = 2, \text{ etc.}$$

De modo que, o que vamos aprender neste capítulo é o **cálculo aritmético dos radicais.**

40. Eliminação de um radical. Extraindo a raiz quadrada do número 2, com diferentes graus de aproximação; depois elevando os resultados ao quadrado, e calculando quanto falta a cada um dêles, para atingir o número 2, teremos;

$\sqrt{2} = 1$	$1^2 = 1$	1,000 000 00
$\sqrt{2} = 1,4$	$1,4^2 = 1,96$	0,040 000 00
$\sqrt{2} = 1,41$	$1,41^2 = 1,988\,1$	0,011 900 00
$\sqrt{2} = 1,414$	$1,414^2 = 1,999\,396$	0,000 604 00
$\sqrt{2} = 1,414\,2$	$1,414\,2^2 = 1,999\,961\,64$	0,000 038 36

Êste quadro nos mostra que, à medida que vamos prosseguindo na extração da raiz quadrada do número 2, vamos obtendo resultados cujos quadrados se aproximam, pouco a pouco, do número 2, sem que, entretanto, seja possível obter o valor exato da raiz quadrada do número 2, isto é, um número cujo quadrado seja 2, o que aliás, já estava previsto.

Suponhamos que, resolvendo um problema, surge a necessidade de extrair a raiz quadrada do número 2. E' desagradável e mesmo prejudicial, extrair a raiz quadrada de 2, e continuar o trabalho com o valor aproximado desta raiz, isto é, com o número 1,414 213 5. . . . . Será mais simples e agradável dizer que a raiz quadrada do número 2, **é o número $\sqrt{2}$**, e continuar a resolução do próblema com o número $\sqrt{2}$, em lugar de complicar o trabalho com o número 1,414 213 5. . . . . o qual, além de ser muito extenso, tem a desvantagem de não representar com exatidão, o número $\sqrt{2}$.

Ora, se a raiz quadrada do número 2 é representada pelo símbolo $\sqrt{2}$, segue-se que o quadrado de $\sqrt{2}$, é o número 2, isto é,

$$(\sqrt{2})^2 = 2$$

Anàlogamente, $(\sqrt{3})^2 = 3$, $(\sqrt{5})^2 = 5$, etc.. Portanto,

Para elevar um radical do segundo grau ao quadrado, é bastante suprimir o radical.

Observação. Suprimir o radical quer dizer suprimir o sinal $\sqrt{\ }$.

E' fácil compreender agora que:

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5 \qquad \left(\sqrt[4]{7}\right)^4 = 7 \qquad \left(\sqrt[5]{8}\right)^5 = 8$$

E, de um modo geral. . . . . $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Observação. E' conveniente os estudantes saberem de cor que . . . . . $\sqrt{2} = 1,414\,213\,5$. . . . . Para decorarem mais facilmente êste número, dirão: 14—14—21—35. E' útil observar que $\sqrt{25}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[4]{81}$, etc., têm a *forma* de radicais, mas não são radicais, no verdadeiro sentido; são números racionais, porque $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[4]{81} = 3$, e os números 5, 2 e 3 são racionais.

41. Teorema fundamental do cálculo dos radicais. Para elevar um monômio ao quadrado, eleva-se cada um dos seus fatores ao quadrado, e multiplicam-se os resultados. (E.M.T.V. §36) Por exemplo,

$$(5a^3b^4)^2 = (5)^2 \times (a^3)^2 \times (b^4)^2 = 25 \times a^6 \times b^8 = 25a^6b^8$$

Para extrair a raiz quadrada de um monômio, extrai-se a raiz quadrada de cada um dos seus fatores, e multiplicam-se os resultados. Por exemplo,

$$\sqrt{9a^4b^8c^{12}} = \sqrt{9}\times\sqrt{a^4}\times\sqrt{b^8}\times\sqrt{c^{12}} = 3\times a^2\times b^4\times c^6 = 3a^2b^4c^6$$

Ora, um monômio é um produto; é o produto dos fatores numéricos e literais que o constituem. Podemos pois dizer que:

Para extrair a raiz quadrada de um produto, extrai-se a raiz quadrada de cada um dos seus fatores e, em seguida, multiplicam-se os resultados.

Se um dos fatores não for quadrado perfeito, a raiz quadrada dêste fator será apenas indicada. Por exemplo,

$$\sqrt{9a^4b^2c} = \sqrt{9}\times\sqrt{a^4}\times\sqrt{b^2}\times\sqrt{c} = 3\times a^2\times b\times\sqrt{c} = 3a^2b\sqrt{c}$$

$$\sqrt{9\times16\times10} = \sqrt{9}\times\sqrt{16}\times\sqrt{10} = 3\times4\times\sqrt{10} = 12\sqrt{10}$$

Depois dêstes exemplos é fácil estabelecer que:

Para extrair a raiz cúbica de um produto, extrai-se a raiz cúbica de cada um dos seus fatores e, em seguida, multiplicam-se os resultados.

Se um dos fatores não for um cubo perfeito, a raiz cúbica dêste fator será apenas indicada. Por exemplo,

$$\sqrt[3]{8a^3b} = \sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{a^3}\times\sqrt[3]{b} = 2\times a\times\sqrt[3]{b} = 2a\sqrt[3]{b}$$

$$\sqrt[3]{8\times27\times10} = \sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{10} = 2\times3\times\sqrt[3]{10} = 6\sqrt[3]{10}$$

Para extrair a raiz quarta de um produto, extrai-se a raiz quarta de cada um dos seus fatores e, em seguida, multiplicam-se os resultados.

Se um dos fatores não for uma quarta potência exata, a raiz quarta dêste fator será apenas indicada. Por exemplo,

$$\sqrt[4]{16a^8b} = \sqrt[4]{16}\times\sqrt[4]{a^8}\times\sqrt[4]{b} = 2\times a^2\times\sqrt[4]{b} = 2a^2\sqrt[4]{b}$$

$$\sqrt[4]{16\times81\times5} = \sqrt[4]{16}\times\sqrt[4]{81}\times\sqrt[4]{5} = 2\times3\times\sqrt[4]{5} = 6\sqrt[4]{5}$$

E assim por diante.

Podemos agora concluir com o **teorema fundamental do cálculo dos radicais.**

Para extrair a raiz enésima de um produto, extrai-se a raiz enésima de cada um dos seus fatores e, em seguida, multiplicam-se os resultados.

E em linguagem algébrica escreveremos:

$$\boxed{\sqrt[n]{abcd\ldots\ldots} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\,\sqrt[n]{c}\,\sqrt[n]{d}\ldots\ldots}$$

42. Simplificação dos radicais. Simplificar um radical é transformá-lo em outro eqüivalente, cujo radicando seja menor. E' uma transformação muito útil, porque nos permite evitar, às vêzes, a extração de uma raiz, operação sempre trabalhosa. Suponhamos que nos pedem $\sqrt{50}$, com êrro inferior a 0,001. E' necessário extrair a raiz quadrada de 50,000 000. Assim procedendo acharemos $\sqrt{50} = 7{,}071$. (E.M.S.V. § 49)

Entretanto, chegaremos a êste resultado, com menos trabalho, e de um modo bastante simples e elegante. Com efeito,

$$\sqrt{50} = \sqrt{2\times5^2}$$

E, de acôrdo com o teorema fundamental do cálculo dos radicais (§ 41) teremos:

$$\sqrt{50} = \sqrt{2\times5^2} = 5\sqrt{2}$$

Ora, $\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,5\ldots\ldots$ Portanto,

$$\sqrt{50} = \sqrt{2\times5^2} = 5\sqrt{2} = 5\times1{,}414\,2 = 7{,}071$$

Observação. Veremos adiante (§ 43) porque foi necessário tomar $\sqrt{2}$ com 4 algarismos decimais.

Vejamos agora, com alguns exemplos, como se procede para simplificar um radical.

I. Simplificar $\sqrt{72}$.

Decompondo o radicando em fatores primos, acharemos $72 = 2^3\times3^2$. Decompomos o fator 2^3 em dois fatores, um dos quais seja um quadrado perfeito, isto é, $2^3 = 2^2\times2^1$. E escreveremos :

$$\sqrt{72} = \sqrt{2^2\times3^2\times2}$$

Em seguida, aplicando ao radicando o teorema fundamental do cálculo dos radicais (§ 41), teremos:

$$\sqrt{72} = \sqrt{2^2\times3^2\times2} = 2\times3\times\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

O fator 6, que fica à esquerda do radical, é chamado **coeficiente** do mesmo radical. E $6\sqrt{2}$ significa $6\times\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}$.

II. Simplificar $\sqrt[3]{80}$.

Decompondo o radicando em fatores primos, acharemos $80 = 2^4\times5$. Decompomos o fator 2^4 em dois fatores, um dos quais seja um cubo perfeito, isto é, $2^4 = 2^3\times 2$. E procedendo como acima, teremos:

$$\sqrt[3]{80} = \sqrt[3]{2^3\times2\times5} = 2\times\sqrt[3]{10} = 2\sqrt[3]{10}$$

III. Simplificar $\sqrt{38\,880}$.

38 880	2
19 440	2
9 720	2
4 860	2
2 430	2
1 215	3
405	3
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

Decompondo o radicando em fatores primos, acharemos $38\,880 = 2^5\times3^5\times5$. Decompondo os fatores 2^5 e 3^5 em dois fatores, cada um dos quais seja um quadrado perfeito, teremos:

$$2^5 = 2^4\times 2 \qquad 3^5 = 3^4\times 3$$

Portanto,

$$\sqrt{38\,880}=\sqrt{2^4\times2\times3^4\times3\times5}=2^2\times3^2\times\sqrt{30}=36\sqrt{30}$$

Exercícios. Série XXI (*)

Simplificar os radicais seguintes:

1. $\sqrt{8}$	7. $\sqrt{128}$	13. $\sqrt[4]{32}$	19. $5\sqrt{8}$	25. $\sqrt{4a^2b}$
2. $\sqrt{18}$	8. $\sqrt{162}$	14. $\sqrt[4]{162}$	20. $3\sqrt[3]{16}$	26. $\sqrt{8ab^2}$
3. $\sqrt{32}$	9. $\sqrt{200}$	15. $\sqrt[5]{64}$	21. $4\sqrt{27}$	27. $\sqrt{16a^4b^2c}$
4. $\sqrt{50}$	10. $\sqrt[3]{16}$	16. $\sqrt[5]{96}$	22. $2\sqrt[3]{40}$	28. $2\sqrt{5x^4}$
5. $\sqrt{72}$	11. $\sqrt[3]{54}$	17. $\sqrt[4]{80}$	23. $3\sqrt[4]{80}$	29. $3\sqrt{a^3b^3}$
6. $\sqrt{98}$	12. $\sqrt[3]{250}$	18. $\sqrt[4]{243}$	24. $\sqrt{a^3b^2}$	30. $4\sqrt[3]{a^4b^3c^3}$

(*) Convém ler a Nota da pág. 271.

31. $2\sqrt{x^3y^4z}$	37. $\sqrt{272}$	43. $\sqrt{64\,800}$
32. $a\sqrt[3]{a^3b^3c^4}$	38. $\sqrt[3]{1\,375}$	44. $3\sqrt[3]{81\,000}$
33. $b\sqrt{20b^3x^2}$	39. $3\sqrt{810}$	45. $\sqrt{106\,722}$
34. $2c\sqrt[3]{c^3d}$	40. $3\sqrt[3]{2\,662}$	46. $\sqrt[4]{151\,875}$
35. $2a\sqrt{a^6b^7}$	41. $\sqrt{567}$	47. $2\sqrt[3]{9\,317}$
36. $3b\sqrt{a^2b^3c^2}$	42. $4\sqrt[4]{768}$	48. $3\sqrt{16\,562}$

49. $\dfrac{a+b}{a-b}\sqrt{\dfrac{(a-b)^3}{(a+b)^3}}$

50. $\sqrt{\dfrac{a^3+2a^2b+ab^2}{am^3+bm^3}}$

51. $\sqrt{\left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a^2-b^2}{2}\right)^2}$

52. $\sqrt{\dfrac{2a^2-4ab+2b^2}{x^2-2xy+y^2}}$

43. Transformação de um radical em fração decimal. Um engenheiro encarregado de construir um viaduto acha que o diâmetro de cada um dos pilares (supostos cilíndricos) deve medir $\sqrt{2}$ metros. Mas êle não pode dizer aos pedreiros que o diâmetro de cada pilar deve medir $\sqrt{2}$ metros; os pedreiros não sabem o que isto significa. O engenheiro calcula $\sqrt{2}$ com êrro inferior a 0,001 e diz aos seus operários que o diâmetro de cada pilar deve medir 1,414 metros.

O que vamos aprender neste parágrafo é a transformação de um radical em uma fração decimal com uma aproximação dada. Lembremos que os radicais são números irracionais. (§37)

Queremos, por exemplo, calcular $\sqrt{50}$ com êrro inferior a 0,001.

$$\sqrt{50} = \sqrt{2\times5^2} = 5\sqrt{2}$$

E lembrando que $\sqrt{2} = 1{,}414$ teremos:

$$\sqrt{50} = 5\times1{,}414 = 7{,}070$$

Mas $\sqrt{50}$ estará realmente calculada com êrro inferior a 0,001? A raiz quadrada de 2 é 1,414 mais uma quantidade cujo valor limite (isto é, que nunca poderá ser atingido) é 0,001. Portanto,

$$\sqrt{50} = 5\sqrt{2} = 5(1{,}414+0{,}001) = 7{,}070+0{,}005$$

Logo, 7,070 não é um valor aproximado de $\sqrt{50}$, com êrro inferior a 0,001. A quantidade que está faltando é superior a 0,001; é igual, no limite, a 0,005.

Portanto, $\sqrt{50}$ pode ser igual a 7,070 ou 7,071 ou 7,072 ou 7,073 ou 7,074.

Tomando $\sqrt{2}$ com 4 algarismos decimais, teremos:

$$\sqrt{50} = 5\sqrt{2} = 5(1{,}414\,2+0{,}000\,1) = 7{,}071\,0+0{,}000\,5$$

Desprezando 0,000 5 que é uma quantidade inferior a 0,001 teremos:

$$\sqrt{50} = 7{,}071 \text{ (com êrro inferior a 0,001 por falta)}$$

Como segundo exemplo, vamos calcular $\sqrt{450}$, com êrro inferior a 0,001.

$$\therefore \quad \sqrt{450} = \sqrt{2\times3^2\times5^2} = 15\sqrt{2} = 15\times1{,}414 = 21{,}210$$

Como no exemplo anterior, êste resultado é suspeito. Com efeito,

$$15\sqrt{2} = 15(1{,}414+0{,}001) = 21{,}210+0{,}015$$

Logo, 21,210 não é um valor aproximado de $\sqrt{450}$, com êrro inferior a 0,001. O que está faltando é superior a 0,001; é igual, no limite, a 0,015 e $\sqrt{450}$ pode ser 21,210 ou 21,213 ou 21,217 ou 21,218 ou 21,220 ou 21,223 ou 21,224.

Tomando $\sqrt{2}$ com 4 algarismos decimais, teremos:

$$15\sqrt{2} = 15(1{,}414\,2+0{,}000\,1) = 21{,}213\,0+0{,}001\,5$$

O êrro é ainda superior a 0,001. Tomando $\sqrt{2}$ com 5 algarismos decimais, teremos:

$$15\sqrt{2} = 15(1{,}414\,21+0{,}000\,01) = 21{,}213\,15+0{,}000\,15$$

E desprezando 0,000 15 que é uma quantidade inferior a 0,001, teremos:

$$\sqrt{450} = 21{,}213 \text{ (com êrro inferior a 0,001 por falta)}$$

Dêstes dois exemplos deduzimos uma regra muito simples e importante para calcular expressões da forma $\mathbf{a}\sqrt{\mathbf{b}}$, com êrro inferior a 0,001. Se o coeficiente **a** é menor que a unidade, calculamos $\sqrt{\mathbf{b}}$ com **três** algarismos decimais.

Se $1 < \mathbf{a} < 10$, calculamos $\sqrt{\mathbf{b}}$ com **quatro** algarismos decimais. Se $10 < \mathbf{a} < 100$, calculamos $\sqrt{\mathbf{b}}$ com **cinco** algarismos decimais. Se $100 < \mathbf{a} < 1\,000$, calculamos $\sqrt{\mathbf{b}}$ com **seis** algarismos decimais. E assim por diante.

Observação. E' fácil compreender qual o caminho a seguir para calcular $\mathbf{a}\sqrt{\mathbf{b}}$ com um determinado número de algarismos decimais.

Exercícios. Série XXII

Sem extrair raízes, e sabendo que ......

$\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,5.....$	$\sqrt{6} = 2{,}449\,489\,7......$
$\sqrt{3} = 1{,}732\,050\,8.....$	$\sqrt{7} = 2{,}645\,751\,3......$
$\sqrt{5} = 2{,}236\,067\,9.....$	$\sqrt{10} = 3{,}162\,277\,7......$

calcular os radicais que se seguem, com o êrro indicado entre parênteses.

1. $\sqrt{8}$ (0,001)	4. $\sqrt{75}$ (0,001)	7. $25\sqrt{72}$ (0,001)
2. $\sqrt{12}$ (0,000 1)	5. $4\sqrt{24}$ (0,01)	8. $50\sqrt{40}$ (0,01)
3. $\sqrt{18}$ (0,000 01)	6. $8\sqrt{63}$ (0,01)	9. $80\sqrt{180}$ (0,001)

44. O radicando fracionário. No cálculo dos radicais é conveniente evitar o radicando fracionário. Já vimos (E.M.S.V. §51) como se extrai a raiz quadrada de uma fração quando o denominador não é quadrado perfeito. Por exemplo,

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2\times3}{3\times3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

E assim a expressão $\sqrt{\frac{2}{3}}$, cujo radicando é fracionário, fica substituída pela expressão $\frac{\sqrt{6}}{3}$, isto é, um radical cujo radicando é um número inteiro e cujo coeficiente é $\frac{1}{3}$.

Do mesmo modo procederemos quando o índice do radical é diferente de 2. Por exemplo:

$$\text{I.} \quad \sqrt[3]{\frac{2}{5}} = \sqrt[3]{\frac{2\times5\times5}{5\times5\times5}} = \frac{\sqrt[3]{50}}{5}$$

$$\text{II.} \quad 3\sqrt[4]{\frac{1}{3}} = 3\sqrt[4]{\frac{1\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3}} = 3\times\frac{\sqrt[4]{27}}{3} = \sqrt[4]{27}$$

Regra. *Quando o radicando é fracionário, multiplicam-se ambos os têrmos da fração por um número tal que o denominador se transforme em uma potência exata, e do mesmo grau que o radical; em seguida, extrai-se a raiz indicada de cada um dos têrmos da fração.* Por exemplo:

1. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$

2. $\sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{3\times5}{5\times5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

3. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1\times2\times2}{2\times2\times2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

4. $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}} = \sqrt[3]{\frac{a^2\times b}{b^2\times b}} = \frac{\sqrt[3]{a^2b}}{b}$

Exercícios. Série XXIII

Transformar os radicais seguintes em outros eqüivalentes cujos radicandos sejam números inteiros:

1. $\sqrt{\frac{1}{2}}$	4. $\sqrt{\frac{5}{6}}$	7. $2\sqrt{\frac{5}{8}}$	10. $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$	13. $4\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$
2. $\sqrt{\frac{2}{3}}$	5. $\sqrt{\frac{1}{3}}$	8. $5\sqrt{\frac{2}{5}}$	11. $5\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	14. $5\sqrt[3]{\frac{15}{32}}$
3. $\sqrt{\frac{3}{5}}$	6. $3\sqrt{\frac{1}{5}}$	9. $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$	12. $2\sqrt[3]{\frac{9}{16}}$	15. $3\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

45. Radicais semelhantes. Consideremos a seguinte expressão:

$$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} + 8\sqrt{2} \qquad (A)$$

E' um polinômio constituído de quatro têrmos, e cada têrmo é um produto constituído de dois fatores; portanto, a expressão (A) pode ser escrita do seguinte modo:

$$3\times\sqrt{2} + 5\times\sqrt{2} + 7\times\sqrt{2} + 8\times\sqrt{2}$$

Pondo o fator comum $\sqrt{2}$ em evidência, teremos:

$$\sqrt{2}(3+5+7+8) = \sqrt{2}\times 23 = 23\sqrt{2}$$

Portanto, o polinômio A, constituído por quatro radicais, é eqüivalente ao monômio $23\sqrt{2}$. Mas esta transformação foi possível porque o polinômio A é constituído por quatro **radicais semelhantes**, isto é, radicais que, *embora não tenham o mesmo coeficiente*, **têm**, entretanto, **o mesmo radicando e o mesmo índice.**

Dois ou mais radicais são semelhantes quando têm o mesmo radicando e o mesmo índice, os coeficientes e os sinais podendo ser iguais ou diferentes.

Às vêzes, dois ou mais radicais têm o mesmo índice, mas não têm o mesmo radicando; logo, não são semelhantes.

I. Consideremos os radicais seguintes:

$$\sqrt{12},\quad \sqrt{27},\quad \sqrt{48},\quad \sqrt{75}$$

Simplificando, teremos:

$$\sqrt{2^2\times3},\quad \sqrt{3^2\times3},\quad \sqrt{4^2\times3},\quad \sqrt{5^2\times3}\quad \therefore$$

$$2\sqrt{3},\quad 3\sqrt{3},\quad 4\sqrt{3},\quad 5\sqrt{3}$$

Portanto, os quatro radicais dados são semelhantes.

II. $\sqrt{5\frac{1}{3}},\quad 3\sqrt{1\frac{1}{3}},\quad 5\sqrt{3}$

Transformando os radicandos fracionários, teremos:

$$\sqrt{\frac{16}{3}},\quad 3\sqrt{\frac{4}{3}},\quad 5\sqrt{3} \qquad \Big| \qquad \frac{\sqrt{16\times3}}{3},\quad \frac{3\sqrt{4\times3}}{3},\quad 5\sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{48}{9}},\quad 3\sqrt{\frac{12}{9}},\quad 5\sqrt{3} \qquad \Big| \qquad \frac{4\sqrt{3}}{3},\quad \frac{6\sqrt{3}}{3},\quad 5\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{48}}{3},\quad \frac{3\sqrt{12}}{3},\quad 5\sqrt{3} \qquad \Big| \qquad \frac{4\sqrt{3}}{3},\quad 2\sqrt{3},\quad 5\sqrt{3}$$

E verificamos assim que os três radicais dados são semelhantes.

Exercícios. Série XXIV

Verificar se os radicais dos grupos que se seguem, são semelhantes; no caso afirmativo, reduzir cada grupo a um único radical, pela adição dos mesmos.

1. $\sqrt{8},\quad \sqrt{18},\quad \sqrt{32},\quad \sqrt{50}$	4. $\sqrt{\frac{3}{4}},\quad \sqrt{\frac{27}{16}},\quad \sqrt{\frac{75}{9}}$
2. $\sqrt[3]{2},\quad \sqrt[3]{16},\quad \sqrt[3]{54},\quad \sqrt[3]{128}$	5. $\sqrt{8x^2},\quad \sqrt{18x^2},\quad \sqrt{32x^2}$
3. $\sqrt{128},\quad \sqrt{18},\quad \sqrt{72},\quad \sqrt{200}$	6. $\sqrt[3]{2a^3b^3},\quad \sqrt[3]{16a^3b^3},\quad \sqrt[3]{54a^3b^3}$

7. $\sqrt{2(a-b)^2}$, $\sqrt{8(a-b)^2}$, $\sqrt{18(a-b)^2}$

8. $\sqrt{\frac{a^2}{2}}$, $\sqrt{\frac{25a^2}{2}}$, $\sqrt{\frac{a^2}{8}}$, $\sqrt{\frac{9a^2}{8}}$

9. $\sqrt[4]{162}$, $\sqrt[4]{512}$, $5\sqrt[4]{32}$, $3\sqrt[4]{1250}$

10. $\sqrt{\frac{a}{bc}}$, $\sqrt{\frac{b}{ac}}$, $\sqrt{\frac{c}{ab}}$.

46. Redução de radicais ao mesmo índice. Os radicais $\sqrt{5}$ e $\sqrt[3]{5}$ têm o mesmo radicando, mas não têm o mesmo índice; logo não são semelhantes. Entretanto, é sempre possível reduzir dois ou mais radicais ao mesmo índice, isto é, transformá-los em radicais eqüivalentes, tendo todos o mesmo índice.

Teorema. *Multiplicando ou dividindo o índice de um radical, e o expoente do radicando por um mesmo número, o valor do radical não se altera.*

Com efeito,
$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \qquad \text{(E.M.T.V. § 43)}$$

Multiplicando ou dividindo os dois têrmos do expoente $\frac{m}{n}$, por um mesmo número r, êle não muda de valor; logo,

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{mr}{nr}} = a^{\frac{m \div r}{n \div r}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nr]{a^{mr}} = \sqrt[n \div r]{a^{m \div r}} \qquad \text{C.Q.D.}$$

De acôrdo com êste teorema,

$$\sqrt[6]{a^{15}} = \sqrt[2]{a^5}; \quad \sqrt[9]{a^{12}} = \sqrt[3]{a^4}; \quad \sqrt[8]{a^{14}} = \sqrt[4]{a^7}$$

Observação. Antes de efetuar uma operação qualquer com frações ordinárias, é indispensável simplificá-las, tornando-as irredutíveis. Anàlogamente, antes de efetuar uma operação qualquer com radicais, *é indispensável simplificá-los*, **dividindo o expoente do radicando e o índice do radical por um mesmo número,** se for possível. Por exemplo,

Calcular $\sqrt[3]{7^6} + \sqrt[4]{2^8} + \sqrt{2}$, com êrro inferior a 0,001.

Simplificando os dois primeiros radicais, teremos:

$$\sqrt[3]{7^6} + \sqrt[4]{2^8} + \sqrt{2} = \sqrt[1]{7^2} + \sqrt[1]{2^2} + \sqrt{2}$$
$$= 49 + 4 + 1{,}414$$
$$= 54{,}414 \text{ (com êrro inferior a 0,001)}$$

O teorema inicial dêste parágrafo nos permite reduzir radicais ao mesmo índice.

Tomemos, como exemplo, os seguintes radicais:

$$\sqrt{a^3}, \quad \sqrt[3]{a^5}, \quad \sqrt[4]{a}, \quad \sqrt[5]{a^2}$$

Em primeiro lugar observemos que nenhum dêstes radicais pode ser simplificado; por analogia com as frações ordinárias podemos chamá-los **radicais irredutíveis.**

Isto pôsto, determinemos o menor múltiplo comum dos índices; é 60. Se dividirmos 60 por cada um dos índices, os quocientes destas quatro divisões serão 30, 20, 15 e 12. Se multiplicarmos o índice do primeiro radical, e o expoente do radicando, por 30; do segundo, por 20; do terceiro, por 15; e do quarto, por 12, nenhum dêstes radicais mudará de valor, e os quatro ficarão reduzidos ao mesmo índice. Na prática, podemos proceder de acôrdo com os dois modelos que se seguem.

I Reduzir ao mesmo índice os radicais

$\sqrt{a^3}$	$\sqrt[3]{a^5}$	$\sqrt[4]{a}$	$\sqrt[5]{a^2}$	
(30)	(20)	(15)	(12)	M.(2, 3, 4, 5) = 60
$\sqrt[60]{a^{90}}$	$\sqrt[60]{a^{100}}$	$\sqrt[60]{a^{15}}$	$\sqrt[60]{a^{24}}$	

II. Reduzir ao mesmo índice os radicais

$\sqrt[3]{a^2b}$	$\sqrt[4]{ab}$	$\sqrt{ab^2}$	$\sqrt[6]{a^2b^3}$	
(4)	(3)	(6)	(2)	M (2, 3, 4, 6) = 12
$\sqrt[12]{a^8b^4}$	$\sqrt[12]{a^3b^3}$	$\sqrt[12]{a^6b^{12}}$	$\sqrt[12]{a^4b^6}$.	

Comparando a redução de frações ao mesmo denominador, pelo processo do menor múltiplo comum, (E.M.P.V. § 130) com a redução de radicais ao mesmo índice, observa-se uma analogia muito interessante entre estas duas transformações.

E' também útil observar que, *reduzir radicais ao mesmo índice,* não significa *tornar semelhantes* êstes mesmos radicais. Consideremos, por exemplo, os radicais $\sqrt{5}$ e $\sqrt[3]{5}$. Êles têm o mesmo radicando, mas não têm o mesmo índice. Logo, não são semelhantes. Reduzindo-os ao mesmo índice, acharemos $\sqrt[6]{5^3}$ e $\sqrt[6]{5^2}$ ou $\sqrt[6]{125}$ e $\sqrt[6]{25}$. Agora êles têm o mesmo índice, mas os radicandos são diferentes; logo não são semelhantes.

Exercícios. Série XXV

Reduzir ao mesmo índice os seguintes grupos de radicais:

1. $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[5]{a^4}$
2. $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[6]{2}$, $\sqrt[8]{2}$
3. $\sqrt[5]{ab}$, $\sqrt[4]{ab}$, $\sqrt{ab}$, $\sqrt[10]{ab}$
4. $\sqrt{a^2b}$, $\sqrt[4]{ab^2}$, $\sqrt[8]{ab}$, $\sqrt[16]{a^2b^2}$
5. $\sqrt[3]{x^3y}$, $\sqrt[4]{x^2y}$, $\sqrt{xy^2}$, $\sqrt[12]{y^3}$
6. $5\sqrt{2}$, $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$, $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{3}$
7. $\dfrac{\sqrt[3]{a}}{2}$, $\dfrac{2\sqrt{a}}{3}$, $\dfrac{3\sqrt[4]{a}}{4}$
8. $2^{\frac{1}{2}}$, $2^{\frac{2}{3}}$, $2^{\frac{3}{4}}$
9. $\sqrt[3]{a+b}$, $\sqrt[4]{a-b}$
10. $\sqrt[5]{x+y}$, $\sqrt[6]{x-y}$

47. Comparação de radicais. Dados os dois radicais ao lado, pergunta-se qual é o maior dos dois. Para responder a esta pergunta é bastante reduzí-los ao mesmo índice.

$$\sqrt[3]{5},\quad \sqrt[5]{15}$$
$$\sqrt[15]{5^5},\quad \sqrt[15]{15^3}$$
$$\sqrt[15]{3125},\quad \sqrt[15]{3375}$$
$$\sqrt[5]{15} > \sqrt[3]{5}$$

Exercícios. Série XXVI

Escrever em ordem de grandeza decrescente os radicais dos grupos seguintes:

1. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2^2}$, $\sqrt[4]{2^3}$
2. $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[5]{a^4}$
3. $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $\sqrt[3]{\dfrac{5}{6}}$
4. $3\sqrt{2}$, $2\sqrt[3]{5}$, $5\sqrt[3]{4}$
5. $\sqrt[4]{x}$, $\sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt{x^3}$
6. $\dfrac{\sqrt[3]{2^2}}{2}$, $\dfrac{\sqrt[4]{2^3}}{3}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

48. Adição de radicais. *Para somar radicais, simplificam-se os mesmos; depois, se os radicais forem semelhantes, somam-se os coeficientes e multiplica-se esta soma pelo radical comum.*

I.
$$\begin{aligned}
&\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{32} + \sqrt{50} =\\
&\sqrt{2^2\times 2} + \sqrt{3^2\times 2} + \sqrt{2^4\times 2} + \sqrt{5^2\times 2} =\\
&2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 14\sqrt{2}
\end{aligned}$$

II.
$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{24} + 5\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{192} =\\
&\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{2^3\times 3} + 5\sqrt[3]{3^3\times 3} + \sqrt[3]{2^6\times 3} =\\
&\sqrt[3]{3} + 2\times 2\sqrt[3]{3} + 5\times 3\sqrt[3]{3} + 4\sqrt[3]{3} =\\
&\sqrt[3]{3} + 4\sqrt[3]{3} + 15\sqrt[3]{3} + 4\sqrt[3]{3} = 24\sqrt[3]{3}
\end{aligned}$$

III.
$$\begin{aligned}
&3\sqrt{50} + 5\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{12} =\\
&3\sqrt{5^2\times 2} + 5\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 2\times\sqrt{2^2\times 3} =\\
&3\times 5\sqrt{2} + 5\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 2\times 2\sqrt{3} =\\
&15\sqrt{2} + 5\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 4\sqrt{3} =\\
&17\sqrt{2} + 9\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Exercícios. Série XXVII

Efetuar as seguintes adições:

1. $3\sqrt{27} + 5\sqrt{12} + 2\sqrt{48}$
2. $\dfrac{\sqrt{48}}{2} + \dfrac{\sqrt{12}}{3} + \dfrac{\sqrt{27}}{4}$
3. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3} + \dfrac{3\sqrt{18}}{4} + \dfrac{\sqrt{50}}{5}$
4. $5\sqrt{a^3} + 3\sqrt{4a^3} + 7\sqrt{9a^3}$

5. $\sqrt{200} + 5\sqrt{50} + 3\sqrt{288}$

6. $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250} + 3\sqrt[3]{192}$

7. $\sqrt{1701} + \dfrac{\sqrt{84}}{4} + \dfrac{\sqrt{525}}{3}$

8. $\dfrac{3\sqrt{20}}{2} + \dfrac{2\sqrt{45}}{3} + \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

9. $2\sqrt[3]{16} + \dfrac{3\sqrt[3]{128}}{4} + \dfrac{3\sqrt[3]{250}}{5}$

10. $\sqrt{363} + \sqrt{588} + \sqrt{972}$

11. $2\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{12}}{2} + 3\sqrt{27} + \sqrt{\dfrac{1}{3}}$

12. $\sqrt{\dfrac{1}{2}} + \sqrt{\dfrac{25}{2}} + 3\sqrt{\dfrac{1}{8}} + \sqrt{\dfrac{9}{8}}$

13. $3\sqrt{8(a+b)} + 5\sqrt{18(a+b)} + \sqrt{50(a+b)}$

14. $\sqrt[3]{16a^3b^3} + 2\sqrt[3]{54a^3b^3} + 3\sqrt[3]{128a^3b^3} + 5\sqrt[3]{250a^3b^3}$

49. Subtração de radicais. *Para calcular a diferença entre dois radicais, simplificam-se os mesmos; depois, se forem semelhantes, subtrai-se o coeficiente do segundo, do coeficiente do primeiro, e multiplica-se o resto pelo radical comum.*

I. $15\sqrt[4]{a^2} - 10\sqrt{a} = 15\sqrt{a} - 10\sqrt{a} = 5\sqrt{a}$

II.
$$\begin{aligned} 2\sqrt[3]{320} - 3\sqrt[3]{40} &= 2\sqrt[3]{2^6\times5} - 3\sqrt[3]{2^3\times5} \\ &= 2\times2^2\sqrt[3]{5} - 3\times2\sqrt[3]{5} \\ &= 8\sqrt[3]{5} - 6\sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5} \end{aligned}$$

III.
$$\begin{aligned} 2\sqrt{\frac{5}{3}} - 3\sqrt{\frac{3}{5}} &= 2\times\sqrt{\frac{15}{9}} - 3\times\sqrt{\frac{15}{25}} \\ &= 2\times\frac{\sqrt{15}}{3} - 3\times\frac{\sqrt{15}}{5} \\ &= \frac{2\sqrt{15}}{3} - \frac{3\sqrt{15}}{5} \\ &= \frac{10\sqrt{15}}{15} - \frac{9\sqrt{15}}{15} = \frac{\sqrt{15}}{15} \end{aligned}$$

Exercícios. Série XXVIII

Efetuar as subtrações seguintes:

1. $3\sqrt{50} - 5\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

2. $5\sqrt{28} - \sqrt{63}$

3. $7\sqrt[3]{192} - 2\sqrt[3]{-81}$

4. $\dfrac{\sqrt{45}}{3} - \sqrt{\dfrac{4}{5}}$

5. $10\sqrt{50} - 3\sqrt{32}$

6. $\sqrt[3]{-250} - \sqrt[3]{-16}$

7. $10\sqrt[3]{16} - 3\sqrt[3]{-81}$

8. $\sqrt{64a^3b} - \sqrt{25ab^3}$

9. $\sqrt{81a^3b^3} - \sqrt{16a^3b^3}$

10. $\sqrt{\dfrac{2}{5}} - \sqrt{\dfrac{1}{40}}$

Calcular as expressões seguintes, com êrro inferior a 0,001.

11. $3\sqrt{8} + 5\sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{50}$

12. $5\sqrt{50} - 3\sqrt{8} + 2\sqrt{2} - 4\sqrt{32} + \sqrt{200}$

13. $\sqrt{32x^2} - \sqrt{8x^2} + 5\sqrt{18a^2} - \sqrt{98a^2}$

14. $5\sqrt{8} + 7\sqrt{12} - 3\sqrt{50} - 2\sqrt{27} + \sqrt{200} + \sqrt{300}$

15. $5\sqrt{\dfrac{1}{2}} - 3\sqrt{\dfrac{1}{8}} + 4\sqrt{\dfrac{1}{32}} + \sqrt{\dfrac{1}{64}}$

50. A raiz quadrada de 3. E' 1,732 050 8... (com êrro inferior a 0,000 000 1 por falta). E um número que aparece com muita freqüência nos problemas de Geometria e Trigonometria, principalmente em se tratando de um triângulo eqüilátero. Portanto, é conveniente saber de cor que $\sqrt{3} = 1{,}732\,050\,8\ldots$

Observação. Durante alguns dias consecutivos, o professor perguntará à classe: $\sqrt{3}$? E a classe, em côro, responderá: 17-32-05-08. E estará decorada a raiz de 3, com 7 algarismos decimais.

51. Multiplicação de radicais. Já aprendemos que

$$\sqrt[n]{abcd\ldots} = \sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}\times\sqrt[n]{c}\times\sqrt[n]{d}\ldots \qquad (\S\,41)$$

Portanto, é evidente que

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}\times\sqrt[n]{c}\times\sqrt[n]{d}\ldots = \sqrt[n]{abcd\ldots}$$

Regra. *Para multiplicar dois ou mais radicais com o mesmo índice, é bastante multiplicar os radicandos, e colocar o produto sob um radical com o mesmo índice dos radicais fatores.*

Por exemplo, $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{300}$

Para multiplicar radicais com índices diferentes, é necessário reduzí-los, preliminarmente, ao mesmo índice. Por exemplo,

$$\sqrt[3]{5} \times \sqrt{2} = \sqrt[6]{5^3} \times \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{125 \times 4} = \sqrt[6]{500} \qquad (\S\,46)$$

Na prática não se deve efetuar a multiplicação dos radicandos; convém apenas indicá-la para simplificar a decomposição do radicando em fatores primos, e a conseqüente simplificação do radical. Exemplo:

$$\begin{aligned}\sqrt{8}\times\sqrt{6}\times\sqrt{5}\times\sqrt{15}\times\sqrt{2} &= \sqrt{2^3\times2\times3\times5\times3\times5\times2}\\ &= \sqrt{2^4\times3^2\times5^2\times2}\\ &= 60\sqrt{2}\\ &= 60\times1{,}41421\\ &= 84{,}852.\ \text{(com êrro inferior a 0,001)}\end{aligned}$$

Retomando a expressão (A) do parágrafo 38, teremos:

$$\begin{aligned}\sqrt{6}\times\sqrt{10}\times\sqrt{15}\times\sqrt{28}\times\sqrt{63} &= \sqrt{2\times3\times2\times5\times3\times5\times2^2\times7\times3^2\times7}\\ \text{''}\quad &= \sqrt{2^4\times3^4\times5^2\times7^2}\\ \text{''}\quad &= 2^2\times3^2\times5\times7\\ \text{''}\quad &= 1\,260\end{aligned}$$

Este exemplo mostra, com eloqüência, toda a beleza do cálculo dos radicais.

Exercícios. Série XXIX

Efetuar as operações abaixo indicadas:

1. $\sqrt{3}\times\sqrt{6}\times\sqrt{18}$
2. $\sqrt[3]{9}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{81}$
3. $\sqrt[4]{a^5b}\times\sqrt[4]{ab^5}$
4. $\sqrt{8x^2y^3}\times\sqrt{2x^3y^2}\times\sqrt{3xy}$
5. $3\sqrt{2}\times4\sqrt{3}\times5\sqrt{8}$
6. $3\sqrt{5}\times\sqrt{15}\times4\sqrt{10}$
7. $5\sqrt{6}\times2\sqrt{14}\times\sqrt{7}$
8. $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{5}\times\dfrac{\sqrt{10}}{3}$
9. $\dfrac{3\sqrt{10}}{7}\times\dfrac{7\sqrt{15}}{10}\times\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$
10. $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{2}\times\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}\times\dfrac{\sqrt[3]{81}}{10}$
11. $\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{4}\times\sqrt{5}\times\sqrt{6}\times\sqrt{7}\times\sqrt{35}$
12. $\sqrt{10}\times2\sqrt{20}\times3\sqrt{30}\times4\sqrt{40}\times5\sqrt{50}\times6\sqrt{60}$
13. $\dfrac{5\sqrt{8}}{4}\times\dfrac{2\sqrt{27}}{3}\times\dfrac{3\sqrt{50}}{5}\times\dfrac{7\sqrt{48}}{4}$

14. $\sqrt{20}+\sqrt{3}\times\sqrt{15}+7\sqrt{5}+2\sqrt{15}\times3\sqrt{3}+\sqrt{125}$
15. $3\sqrt{2}\times5\sqrt{3}-2\sqrt{24}+7\sqrt{27}\times5\sqrt{50}-\sqrt{242}\times\sqrt{300}$
16. $(a+\sqrt{b})^2$
17. $(a-\sqrt{b})^2$
18. $(3a+2\sqrt{b})^2$
19. $(3a-2\sqrt{b})^2$
20. $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$
21. $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$
22. $(3\sqrt{x}+2\sqrt{y})^2$
23. $(3\sqrt{x}-2\sqrt{y})^2$
24. $(\sqrt{2a}+\sqrt{3b})^2$
25. $(\sqrt{2a}-\sqrt{3b})^2$
26. $(5a+\sqrt{b})^2$
27. $(2\sqrt{a}+3b)^2$
28. $(\sqrt{x}-y)^2$
29. $(3\sqrt{x}+2y)^2$
30. $(5x+3\sqrt{y})^2$
31. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$
32. $(2\sqrt{x}+3\sqrt{y})(2\sqrt{x}-3\sqrt{y})$
33. $(3\sqrt{a}+4\sqrt{b})(3\sqrt{a}-4\sqrt{b})$
34. $(5\sqrt{x}+4\sqrt{y})(5\sqrt{x}-4\sqrt{y})$
35. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(5\sqrt{2}+4\sqrt{3})$
36. $(3\sqrt{5}+2\sqrt{3})(4\sqrt{2}-7\sqrt{3})$
37. $(5\sqrt{10}-3\sqrt{5})(4\sqrt{2}-3\sqrt{4})$
38. $(3\sqrt{5}-\sqrt{2})(2\sqrt{5}-5\sqrt{2})$
39. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(3\sqrt{3}+2\sqrt{2})^2+(5\sqrt{2}-5\sqrt{3})^2=$
40. $(2\sqrt{5}+3\sqrt{3})^2-(4\sqrt{5}-5\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=$

52. Divisão de radicais. Já vimos que $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$. (§ 51)

Portanto $\sqrt[n]{ab}\div\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$. Podemos então concluir que:

Regra. *Para dividir dois radicais* **com o mesmo índice,** *divide-se o primeiro radicando, pelo segundo, e coloca-se o quociente sob um radical com o mesmo índice dos radicais dados.*

Por exemplo, $\sqrt[3]{81}\div\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{27}=3$.

Para dividir radicais com índices diferentes, é necessário reduzí-los, preliminarmente, ao mesmo índice. Por exemplo:

$$\sqrt[3]{25}\div\sqrt{5}=\sqrt[6]{25^2}\div\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{325}\div\sqrt[6]{125}=\sqrt[6]{5}$$

Quando os dois radicais dados têm coeficientes, é preciso, em primeiro lugar, dividir os coeficientes.

$$a\sqrt{x}\div b\sqrt{y}=\frac{a}{b}\sqrt{\frac{x}{y}}$$

Com efeito, $\dfrac{a}{b}\sqrt{\dfrac{x}{y}}\times b\sqrt{y}=\dfrac{ab}{b}\sqrt{\dfrac{xy}{y}}=a\sqrt{x}.$

Por exemplo, $35\sqrt{50}\div7\sqrt{5}=5\sqrt{10}$.

Se o primeiro radicando não é divisível pelo segundo, indica-se a divisão e simplifica-se o quociente. (§ 44)

Exemplo. $\sqrt{3} \div \sqrt{5} = \sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{15}{25}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

Exercícios. Série XXX

1. $5\sqrt{162} \div 3\sqrt{2}$
2. $7\sqrt{x^7} \div \sqrt{x^3}$
3. $\sqrt{363} \div \sqrt{12}$
4. $\sqrt{720} \div 3\sqrt{10}$
5. $3\sqrt{1\,323} \div 5\sqrt{1\,250}$
6. $\sqrt{\frac{3}{5}} \div \sqrt{\frac{1}{2}}$
7. $4\sqrt{\frac{2}{3}} \div 5\sqrt{\frac{4}{9}}$
8. $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} \div \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{5}}$
9. $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{9}{10}} \div \frac{5}{8}\sqrt{\frac{3}{5}}$
10. $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{x}{y}} \div \frac{3a}{5b}\sqrt{\frac{2x}{3y}}$
11. $\sqrt{192}+10\sqrt{90} \div 2\sqrt{2}-7\sqrt{6}\times\sqrt{2}+4\sqrt{\frac{2}{3}} \div \sqrt{\frac{8}{9}}$
12. $\sqrt{50}+3\sqrt{8}\times 5\sqrt{32}+\frac{12\sqrt{28}}{\sqrt{7}}-\frac{1}{2}$ de $\sqrt{578}$
13. $\frac{7\sqrt{40}}{2\sqrt{2}}\times\sqrt{98}+3\sqrt{900}+\frac{3\sqrt{8}\times 5\sqrt{45}}{2}$

52. Potenciação de radicais. *Para elevar um radical a uma potência qualquer, é bastante elevar o radicando a esta potência.*

Vamos mostrar que $\left(\sqrt[4]{a^3}\right)^5 = \sqrt[4]{a^{15}}$

Por definição,

$$\left(\sqrt[4]{a^3}\right)^5 = \sqrt[4]{a^3}\times\sqrt[4]{a^3}\times\sqrt[4]{a^3}\times\sqrt[4]{a^3}\times\sqrt[4]{a^3}$$

Ora, para multiplicar radicais com o mesmo índice é bastante multiplicar os radicandos. (§ 51)

Portanto, $\left(\sqrt[4]{a^3}\right)^5 = \sqrt[4]{a^{15}}$

E, de um modo geral, $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^x = \sqrt[n]{a^{mx}}$

Exercícios. Série XXXI

1. $(2\sqrt{2})^4 + (3\sqrt{2^3})^4 + (5\sqrt{2^5})^2 =$
2. $5(\sqrt[3]{a^2})^3 + 4(\sqrt[5]{a^2})^{10} + 3(\sqrt[3]{a^4})^6 =$
3. $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3 \div 4\left(\sqrt{\frac{1}{8}}\right)^3 =$
4. $\frac{(\sqrt{2})^3}{(\sqrt{27})^3} \times \frac{27\sqrt{3}}{5\sqrt{2}} =$

54. Radiciação de radicais. *Para extrair uma raiz qualquer de um radical, isto é, para substituir um duplo radical, por um radical simples, é bastante multiplicar os índices.*

Vamos mostrar que $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[12]{a}$. Façamos $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = x$. (1)

Elevando ambos os membros de (1), à terceira potência, teremos:

$$\sqrt[4]{a} = x^3 \quad (2) \qquad (§ 40)$$

Elevando ambos os membros de (2), à quarta potência, teremos:

$$a = x^{12} \quad (3) \qquad (§ 40)$$

Extraindo a raiz décima segunda de ambos os membros de (3), teremos:

$$\sqrt[12]{a} = x$$

Porém, $x = \sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}$. Portanto, $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[12]{a}$

E, de um modo geral, $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Exercícios. Série XXXII

1. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^6b^{12}}} =$
2. $\sqrt{\sqrt[3]{125}} =$
3. $\left(\sqrt[3]{128}\right)^{\frac{1}{2}} =$
4. $\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} =$
5. $\left(\frac{a}{5}\sqrt[3]{\frac{a}{5}}\right)^{\frac{1}{2}} =$
6. $\sqrt{\left(\sqrt[5]{a^3}\right)^4} =$

55. Frações irracionais. Às vêzes, o denominador de uma fração é irracional. E' o que acontece, por exemplo, com a fração $\frac{3}{\sqrt{2}}$. Se quisermos calcular esta fração com êrro inferior a 0,001 a operação será algo aborrecida. Com efeito, fazendo $\sqrt{2} = 1{,}414$ teremos:

$$3 \div \sqrt{2} = 3 \div 1{,}414 = 3{,}000\,000 \div 1{,}414$$

$$3{,}000\,000 \div 1{,}414 = 2{,}121$$

Ora, esta divisão pode ser evitada; a expressão $\frac{3}{\sqrt{2}}$ pode ser calculada muito mais ràpidamente, e de um modo muito simples e elegante. Já sabemos que, multiplicando ambos os têrmos de uma fração, por um mesmo número, o seu valor não se altera. Portanto,

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Com esta transformação tão simples, o denominador da fração $\frac{3}{\sqrt{2}}$, que é *irracional*, torna-se *racional*; como se diz em Matemática, o denominador fica *racionalizado*; dá-se a esta transformação o nome de *racionalização do denominador.* E teremos:

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3 \times 1{,}414}{2} = \frac{4{,}242}{2} = 2{,}121$$

De um modo análogo,

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2 \times 1{,}732}{3} = \frac{3{,}464}{3} = 1{,}154$$

Regra. *Para racionalizar o denominador de uma fração, multiplicam-se ambos os têrmos desta fração por um fator que torne racional o seu denominador.*

Êste fator é chamado *fator racionalizante.*

Exercícios em classe

I. Tornar racional o denominador da fração $\frac{5}{3\sqrt{2}}$. O fator racionalizante é $\sqrt{2}$. Portanto,

$$\frac{5}{3\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{3 \times 2} = \frac{5\sqrt{2}}{6}$$

II. Tornar racional o denominador da fração $\frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}$. O fator racionalizante é $\sqrt{3}$. Portanto,

$$\frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}\sqrt{3}}{5\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{6}}{5 \times 3} = \frac{\sqrt{6}}{5}$$

III. Tornar racional o denominador da fração $\frac{7}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$. O fator racionalizante é $\sqrt{3}-\sqrt{2}$. Portanto,

$$\frac{7}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{7(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{7(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2} = 7(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

IV. Tornar racional o denominador da fração $\frac{5}{3-\sqrt{2}}$. O fator racionalizante é $3+\sqrt{2}$. Portanto,

$$\frac{5}{3-\sqrt{2}} = \frac{5(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} = \frac{5(3+\sqrt{2})}{9-2} = \frac{5(3+\sqrt{2})}{7}$$

V. Tornar racional o denominador da fração $\frac{4+\sqrt{5}}{3\sqrt{5}+2\sqrt{3}}$. O fator racionalizante é $3\sqrt{5}-2\sqrt{3}$. Portanto,

$$\frac{4+\sqrt{5}}{3\sqrt{5}+2\sqrt{3}} = \frac{(4+\sqrt{5})(3\sqrt{5}-2\sqrt{3})}{(3\sqrt{5}+2\sqrt{3})(3\sqrt{5}-2\sqrt{3})} = \frac{12\sqrt{5}+15-8\sqrt{3}-2\sqrt{15}}{9 \times 5 - 4 \times 3} =$$

$$= \frac{15+12\sqrt{5}-8\sqrt{3}-2\sqrt{15}}{45-12} = \frac{15+12\sqrt{5}-8\sqrt{3}-2\sqrt{15}}{33}$$

Exercícios. Série XXXIII

Calcular com êrro inferior a 0,001 as expressões que se seguem, racionalizando prèviamente o denominador.

1. $\frac{10}{\sqrt{2}}$	3. $\frac{20}{\sqrt{5}}$	5. $\frac{8}{3\sqrt{2}}$	7. $\frac{15}{4\sqrt{5}}$	9. $\frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$	11. $\frac{7\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$
2. $\frac{12}{\sqrt{3}}$	4. $\frac{21}{\sqrt{6}}$	6. $\frac{9}{2\sqrt{3}}$	8. $\frac{12}{5\sqrt{6}}$	10. $\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}$	12. $\frac{7\sqrt{6}}{5\sqrt{3}}$

Observação. Nestes 12 exercícios ocorrem com freqüência os radicais $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ e $\sqrt{6}$, cujos valores aritméticos estão nos Exercícios, série XXII.

13. $\dfrac{7}{2+\sqrt{2}}$

14. $\dfrac{3}{3-\sqrt{2}}$

15. $\dfrac{5}{5+\sqrt{3}}$

16. $\dfrac{10}{4-\sqrt{5}}$

17. $\dfrac{12}{2+\sqrt{6}}$

18. $\dfrac{\sqrt{5}}{3+\sqrt{3}}$

19. $\dfrac{\sqrt{3}}{7-\sqrt{2}}$

20. $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

21. $\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

22. $\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

23. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{5}}$

24. $\dfrac{5\sqrt{3}}{4\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$

25. $\dfrac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

26. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

27. $\dfrac{3\sqrt{3}+5\sqrt{5}}{7\sqrt{5}-2\sqrt{3}}$

56. Os números imaginários. Já vimos que não existe um número inteiro ou fracionário, positivo ou negativo, racional ou irracional, cujo quadrado seja -25 (*menos* 25) (§§ 23 e 37).

A expressão $\sqrt{-25}$ é chamada, em Matemática, *número imaginário*.

As expressões $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-10}$, etc., enfim, as raízes quadradas de números negativos, são números imaginários.

Entretanto, $\sqrt[3]{-8}$ não é um número imaginário, porque $\sqrt[3]{-8} = -2$. Com efeito, $(-2)^3 = -8$.

Mas a raiz quarta de um número negativo é um número imaginário; $\sqrt[4]{-16}$ é um número imaginário, porque não há um número positivo ou negativo, cuja quarta potência seja negativa.

Entretanto, $\sqrt[5]{-32}$ não é um número imaginário, porque $\sqrt[5]{-32} = -2$. Com efeito $(-2)^5 = -32$.

Em resumo, *o número imaginário é uma raiz com índice par de um número negativo.*

Para se distinguirem dos *números imaginários*, os números inteiros ou fracionários, racionais ou irracionais, positivos ou negativos, tomam o nome de *números reais*.

Consideremos o número imaginário $\sqrt{-25}$. Transformando o radicando em um produto de dois fatores, a saber, 25 e -1, teremos:

$$\sqrt{-25} = \sqrt{25(-1)} \quad \therefore \quad \sqrt{-25} = \sqrt{25}\times\sqrt{-1} = 5\times\sqrt{-1} = 5\sqrt{-1} \quad (\S\,42)$$

Ora, sendo $\sqrt{-1}$ um número imaginário, é evidente que $5\sqrt{-1}$ é também um número imaginário. A transformação que fizemos com o número $\sqrt{-25}$, teve por fim isolar o número $\sqrt{-1}$. Dá-se ao número $\sqrt{-1}$, o nome de *unidade imaginária*.

Em Matemática, a unidade imaginária é representada pela letra i: de modo que, salvo aviso em contrário, i significa $\sqrt{-1}$.

Um número imaginário qualquer pode sempre ser transformado de modo tal que se ponha em evidência a unidade imaginária. Por exemplo,

$$3\sqrt{-16} = 3\sqrt{16(-1)} = 3\times4\times\sqrt{-1} = 12i$$
$$5\sqrt{-36} = 5\sqrt{36(-1)} = 5\times6\times\sqrt{-1} = 30i$$
$$2\sqrt{-5} = 2\sqrt{5(-1)} = 2\times\sqrt{5}\times\sqrt{-1} = 2i\sqrt{5}$$
$$4\sqrt{-50} = 4\sqrt{2\times25\times(-1)} = 4\times5\times\sqrt{2}\times\sqrt{-1} = 20i\sqrt{2}$$

Exercícios em classe

Simplificar as seguintes expressões:

1. $2\sqrt{-49}$	4. $6\sqrt{-121}$	7. $8\sqrt{-5}$	10. $3\sqrt{-12}$
2. $3\sqrt{-64}$	5. $4\sqrt{-2}$	8. $2\sqrt{-6}$	11. $4\sqrt{-27}$
3. $5\sqrt{-100}$	6. $7\sqrt{-3}$	9. $5\sqrt{-8}$	12. $2\sqrt{-32}$

57. O quadrado da unidade imaginária. Se pedirmos a um estudante que calcule o quadrado da unidade imaginária, êle talvez faça o seguinte cálculo:

$$i^2 = \sqrt{-1}\times\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = +1 \qquad (\S\,51)$$

Pois bem; êste estudante terá cometido um êrro grave, porque a regra que êle seguiu só é verdadeira no *cálculo aritmético dos radicais* e não se aplica, em geral, aos números imaginários.

O quadrado da unidade imaginária é, por definição, -1.

$$(\sqrt{-1})^2 = -1$$

E diremos:

A unidade imaginária é o número cujo quadrado é 1.

58. As potências da unidade imaginária. Para facilitar o cálculo com números imaginários, é necessário que o estudante conheça bem as diferentes potências da unidade imaginária.

$$(\sqrt{-1})^1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad +\sqrt{-1} = +i$$
$$(\sqrt{-1})^2 = -1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad = -1$$
$$(\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2\,\sqrt{-1} = (-1)\sqrt{-1} \ldots\ldots \quad -\sqrt{-1} = -i$$
$$(\sqrt{-1})^4 = (\sqrt{-1})^2(\sqrt{-1})^2 = (-1)(-1) \ldots\ldots \quad = +1$$
$$(\sqrt{-1})^5 = (\sqrt{-1})^4\,\sqrt{-1} = (+1)\sqrt{-1} \ldots\ldots \quad +\sqrt{-1} = +i$$
$$(\sqrt{-1})^6 = (\sqrt{-1})^4(\sqrt{-1})^2 = (+1)(-1) \ldots\ldots \quad = -1$$
$$(\sqrt{-1})^7 = (\sqrt{-1})^4(\sqrt{-1})^3 = (+1)(-\sqrt{-1}) \ldots\ldots \quad -\sqrt{-1} = -i$$
$$(\sqrt{-1})^8 = (\sqrt{-1})^4(\sqrt{-1})^4 = (+1)(+1) \ldots\ldots \quad = +1$$
$$(\sqrt{-1})^9 = (\sqrt{-1})^8\,\sqrt{-1} = (+1)\sqrt{-1} \ldots\ldots \quad +\sqrt{-1} = +i$$

E assim por diante. Resumindo êste quadro, teremos:

$i^1 = +i$	$i^5 = +i$	$i^9 = +i$
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$	$i^{10} = -1$
$i^3 = -i$	$i^7 = -i$	$i^{11} = -i$
$i^4 = +1$	$i^8 = +1$	$i^{12} = +1$, etc..

Os números $3+5i$, $2-7i$, $5+3i$, etc., são chamados *números complexos*. A forma normal de um número complexo é $a+bi$, sendo a o número de unidades reais, e b o número de unidades imaginárias. Quando $b=0$, o número complexo se reduz a um número real, a. Quando $a=0$, o número complexo se reduz ao que se chama um *imaginário puro*, isto é, bi.

Dois complexos da forma $a+bi$ e $a-bi$ são chamados *conjugados*. Por exemplo, $5+3i$ e $5-3i$ são *complexos conjugados* ou *imaginários conjugados*.

A soma de dois imaginários conjugados é um número real. Com efeito, $(a+bi)+(a-bi) = 2a$.

O produto de dois imaginários conjugados é um número real. Com efeito, $(a+bi)\times(a-bi) = a^2-b^2i^2 = a^2-b^2(-1) = a^2+b^2$.

Observação. Os números imaginários aparecerão mais tarde na resolução dos problemas do segundo grau.

CAPÍTULO V

Equações do Segundo Grau

59. Preliminares. Consideremos um polinômio racional, inteiro e do 2.º grau em relação à letra x (E.M.T.V. § 28), por exemplo, $3x^2-7x+2$. Igualando-o a zero, teremos a equação

$$3x^2-7x+2 = 0 \qquad (A)$$

A equação A é uma equação do 2.º grau com uma incógnita, x.

Uma equação com uma incógnita é do segundo grau quando, sendo nulo um dos seus membros, o outro é do segundo grau em relação à incógnita.

Examinemos, agora, as equações seguintes:

$$5x^2+30x = 0 \quad (B)$$
$$7x^2-42 = 0 \quad (C)$$
$$3x^2 = 0 \quad (D)$$

Também são equações do segundo grau. Mas, o primeiro membro de cada uma das equações B, C e D não é um polinômio completo, em relação a x; no primeiro membro de (B) falta a *potência zero* de x; no primeiro membro de (C) falta a *primeira potência* de x; no primeiro membro de (D) faltam a *primeira potência* e a *potência zero* de x. Para distinguir a equação A, das equações B, C e D, diremos que a equação A é uma *equação completa* e as outras tres são *equações incompletas*. Portanto,

A equação do segundo grau com uma incógnita é completa, quando contém:

1.º) *Um têrmo em que* **x** *tem o expoente* 2, *têrmo êste cujo coeficiente pode ser um número qualquer que, em geral, é representado pela letra* **a**.

2.º) *Um têrmo em que* **x** *tem o expoente* **1**, *têrmo êste cujo coeficiente pode ser um número qualquer, representado geralmente pela letra* **b**.

3.º) *Um têrmo em que* **x** *tem o expoente zero (portanto, não contém* x) *têrmo êste que é geralmente representado pela letra* **c**, *e que é chamado* **têrmo conhecido** ou **têrmo independente da incógnita.**

Donde resulta que a forma normal de uma equação completa do segundo grau com uma incógnita é:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

E a forma normal das equações incompletas do segundo grau com uma incógnita, isto é, das equações B, C e D, é a seguinte:

$$ax^2 + bx = 0 \qquad ax^2 + c = 0 \qquad ax^2 = 0$$

Observação. Uma equação completa do segundo grau com uma incógnita não pode ter mais de três têrmos; um têrmo que contém x^2, outro que contém x^1 e outro que contém x^0. E' evidente que o têrmo que contém x^2 não pode faltar na equação; se êste têrmo não existir, a equação será do primeiro grau. O coeficiente a devendo ser diferente de zero (se a fosse nulo a equação não seria do segundo grau) teremos: (E.M.T.V. § 79).

$$\left\{\begin{array}{r} ax^2 = 0 \\ ax \times x = 0 \end{array}\right\} \therefore \left\{\begin{array}{r} ax = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\} \therefore \left\{\begin{array}{l} x' = 0 \\ x'' = 0 \end{array}\right\}$$

Portanto, a equação $ax^2 = 0$ tem duas raízes nulas, e não mais trataremos das equações desta forma, no decorrer das páginas que se seguem.

Podemos supor que o coeficiente a da equação do segundo grau com uma incógnita é sempre positivo porque, se não o for, ambos os membros da equação serão multiplicados por -1. Por exemplo,

$$\begin{array}{rcl} -3x^2 + 5x - 7 = 0 & \therefore & 3x^2 - 5x + 7 = 0 \\ -7x^2 + 8x = 0 & \therefore & 7x^2 - 8x = 0 \\ -4x^2 + 20 = 0 & \therefore & 4x^2 - 20 = 0 \end{array}$$

Os coeficientes a, b e c são os **parâmetros** da equação.

60. A radiciação nas equações do segundo grau. Consideremos a seguinte equação:..... $x^2 = 36$.

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros desta equação, e lembrando que um número qualquer tem, em Álgebra, duas raízes quadradas, iguais, porém com sinais contrários, teremos:

$$\pm x = \pm 6.$$

Devido ao duplo sinal que precede cada um dos membros desta equação, ela se desdobra em quatro equações, a saber:

$$\begin{array}{rl} +x = +6 & (1) \\ +x = -6 & (2) \\ -x = +6 & (3) \\ -x = -6 & (4) \end{array}$$

Nós sabemos que, multiplicando ambos os membros de uma equação por um mesmo número, diferente de zero, e que não contém a incógnita, a nova equação é eqüivalente

à primeira, isto é, as duas equações têm as mesmas raízes. Ora, multiplicando ambos os membros da equação (4) por -1, teremos a equação (1); multiplicando ambos os membros da equação (3) por -1, teremos a equação (2); portanto, a equação..... $\pm x = \pm 6$....... se desdobra, na realidade, em duas equações, a saber:

$$\left\{\begin{array}{l} +x = +6 \\ +x = -6 \end{array}\right\} \quad \text{ou} \quad x = \pm 6$$

Eis por que, ao extrair a raiz quadrada de ambos os membros de uma equação, é bastante colocar o duplo sinal ($\pm$) sòmente à esquerda da raiz quadrada do segundo membro da equação resultante. Por exemplo, dada a equação...... $(x-5)^2 = 36$... se extrairmos a raiz quadrada de ambos os membros desta equação, deveremos escrever:

$$x - 5 = \pm 6 \quad \therefore \quad x = 5 \pm 6 \quad \therefore \quad \left\{\begin{array}{l} x' = +11 \\ x'' = -\ 1 \end{array}\right\}$$

Considerando a equação...... $x^2 = (a-b)^2$...... e extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, resulta:

$$x = \pm(a-b) \quad \therefore \quad \left\{\begin{array}{l} x' = a - b \\ x'' = b - a \end{array}\right\}$$

61. Resolução da equação $ax^2 + bx = 0$. Vamos resolver a equação $x^2 - 5x = 0$.

Fatorando (E.M.T.V. § 79) .... $x(x-5) = 0$

Igualando a zero cada um dos fatores....

$$\begin{array}{rcl} x = 0 & \therefore & x = 0 \\ x - 5 = 0 & \therefore & x = 5 \end{array} \quad \text{R.} \left\{\begin{array}{l} x' = 0 \\ x'' = 5 \end{array}\right\}$$

Resolvamos agora a equação $\mathbf{ax^2 + bx = 0}$.

Fatorando.......................... $x(ax + b) = 0$

Igualando a zero cada um dos fatores......

$$x = 0 \therefore x' = 0$$

$$ax + b = 0 \therefore x'' = -\frac{b}{a}$$

E podemos concluir que:

A equação do segundo grau, incompleta, e da forma $\mathbf{ax^2 + bx = 0}$, **tem duas raízes,** *a saber:*

a) uma raiz nula, igual a zero.

b) uma raiz igual a $-\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$*, isto é, igual ao quociente que se obtém dividindo o coeficiente de* **x** *pelo de* $\mathbf{x^2}$, **e mudando o sinal**

do resultado. Esta segunda raiz é, portanto, **um número real,** *diferente de zero, inteiro ou fracionário, positivo ou negativo e que* pode ser também *irracional,* se um dos coeficientes a ou b (ou ambos) é um número irracional. Por exemplo:

1. $3x^2+10x=0 \begin{cases} x' = 0 \\ x'' = -\dfrac{10}{3} \end{cases}$

2. $4x^2-20x=0 \begin{cases} x' = 0 \\ x'' = 5 \end{cases}$

3. $3x^2+x\sqrt{2}=0 \begin{cases} x' = 0 \\ x'' = -\dfrac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}$

4. $x^2\sqrt{3}-3x=0 \begin{cases} x' = 0 \\ x'' = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \end{cases}$

Exercícios. Série XXXIV

Resolver as equações que se seguem; se as raízes forem números irracionais, serão calculadas com êrro inferior a 0,001.

1. $7x^2-2\,401x = 0$
2. $11x^2+847x = 0$
3. $12x^2 = 64x$
4. $25x = 80x^2$
5. $0 = 13x-910x^2$
6. $mx^2+m^2nx = 0$
7. $abx-acx^2 = 0$
8. $15mx^2-60m^2x=0$
9. $3a^2bx = 12ab^2x^2$
10. $7m^2n^2x^2-28mnx = 0$
11. $5x^2+x\sqrt{3} = 0$
12. $x^2\sqrt{5}-10x = 0$
13. $4x^2-3x\sqrt{3} = 0$
14. $6x^2\sqrt{3}-2x\sqrt{12} = 0$

62. Resolução da equação $ax^2+c=0$. Resolvamos a equação $4x^2-36 = 0$. Suprimindo o fator 4, comum a ambos os membros da equação, teremos:

$$x^2-9=0 \;\therefore\; x^2=9 \;\therefore\; x=\pm\sqrt{9} \;\therefore\; \begin{cases} x' = +3 \\ x'' = -3 \end{cases}$$

Vamos agora resolver a equação $\mathbf{ax^2+c=0}$. Teremos sucessivamente

$$ax^2+c=0 \;\therefore\; ax^2=-c \;\therefore\; x^2=-\frac{c}{a} \;\therefore\; x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

E podemos concluir que:

A equação do segundo grau incompleta e da forma $\mathbf{ax^2+c=0}$, **tem duas raízes simétricas,** *isto é iguais, porém, com sinais contrários.* Para determiná-las, muda-se o sinal de c, isto é, do têrmo independente de x; divide-se êste coeficiente, assim modificado, por a, isto é, pelo coeficiente de x^2; em seguida, extrai-se a raiz quadrada do quociente.

Quando c é positivo, *as duas raízes são imaginárias;* quando c é negativo, *as duas raízes são reais,* podendo ser inteiras ou fracionárias, racionais ou irracionais.

Exercícios. Série XXXV

Resolver as equações que se seguem; as raízes irracionais serão calculadas com êrro inferior a 0,001.

1. $8x^2-56 = 34-2x^2$
2. $2x^2-205 = 400-3x^2$
3. $5x^2+5 = 4x^2+7$
4. $3x^2-2 = 4x^2-5$
5. $5x^2-\dfrac{1}{2} = 3x^2+\dfrac{5}{8}$
6. $3(2x-3)^2 = 4x(2x-9)+13$
7. $\dfrac{2x^2-4}{7}+\dfrac{x^2+4}{5} = 8$
8. $\dfrac{3}{4x^2}-\dfrac{1}{6x^2} = \dfrac{7}{3}$
9. $7x^2-0{,}226\,8 = 0$
10. $8x^2-0{,}115\,2 = 0$
11. $(x-2)(x-3)=3x^2-5x-156$
12. $(x+5)(x-3) = 4x^2+2x-90$
13. $\dfrac{4}{x+3}-\dfrac{4}{x-3}+\dfrac{1}{3} = 0$
14. $(3x+4)^2 = (x-1)(x+25)$
15. $\dfrac{5x^2+3}{8}-\dfrac{17-x^2}{4} = 4$
16. $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{4}$

63. O trinômio quadrado perfeito. Já o conhecemos. (E.M.T.V. § 56, III) Elevando um binômio ao quadrado, podemos escrever:

$$(a+b)^2 = a^2+\mathbf{2\times a\times b}+b^2$$
$$(a-3)^2 = a^2-\mathbf{2\times a\times 3}+9$$
$$(a+5)^2 = a^2+\mathbf{2\times a\times 5}+25$$
$$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 = a^2-\mathbf{2\times a\times \frac{1}{2}}+\frac{1}{4}$$
$$\left(a+\frac{2}{3}\right)^2 = a^2+\mathbf{2\times a\times \frac{2}{3}}+\frac{4}{9}$$

Escrevendo assim, *deixamos em evidência, conservamos à vista,* **no duplo produto,** os dois têrmos que constituem o binômio que se elevou ao quadrado. E notemos que o duplo produto contém invariavelmente o fator 2. (E' claro! Pois é um duplo produto!)

Isto pôsto, queremos verificar se o trinômio x^2+6x+6 é um quadrado perfeito. Escrevemos o têrmo $6x$, convenientemente fatorado, para que vejamos **o fator constante 2,** e o fator x, raiz quadrada de x^2. E teremos:

$$x^2+6x+6 = x^2+\mathbf{2\times x\times 3}+6$$

Ora, x^2 é um quadrado perfeito, cuja raiz é x. O têrmo $6x$ não é um quadrado perfeito, mas contém o fator x; pode ser,

portanto, um duplo produto que podemos fatorar e escrever: $2 \times x \times 3$.

E concluímos imediatamente que o trinômio dado não é quadrado perfeito. O duplo produto $2 \times x \times 3$ nos está mostrando que o terceiro têrmo do trinômio deveria ser 9, em lugar de 6, para que o trinômio dado fosse um quadrado perfeito.

Exercícios em classe

Verificar se os trinômios que se seguem são quadrados perfeitos.

1. $a^2 + 8a + 16$

$a^2 + 8a + 16 = a^2 + 2 \times a \times 4 + 16 = (a+4)^2$

2. $x^2 + 10 + 30 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 30$

Êste trinômio não é quadrado perfeito, porque 30 não é o quadrado de 5.

3. $a^2 - 12a + 36$

$a^2 - 12a + 36 = a^2 - 2 \times a \times 6 + 36 = (a-6)^2$

4. $x^2 + 4x + 8$

$x^2 + 4x + 8 = x^2 + 2 \times x \times 2 + 8$

Êste trinômio não é quadrado perfeito, porque 8 não é o quadrado de 2.

5. $a^2 - 7a + \frac{49}{4}$

Desta vez, dirão os leitores, onde está o fator 2, no duplo produto, isto é, em $7a$? Lembrem-se, porém, que um monômio não se altera, se for multiplicado e depois dividido por 2. E teremos:

$$a^2 - 7a + \frac{49}{4} = a^2 - 2 \times a \times \frac{7}{2} + \frac{49}{4} = \left(a - \frac{7}{2}\right)^2$$

6. $a^2 + 5a + \frac{15}{4} = a^2 + 2 \times a \times \frac{5}{2} + \frac{15}{4}$

Êste trinômio não é quadrado perfeito, porque $\frac{15}{4}$ não é o quadrado de $\frac{5}{2}$.

7. Qual o têrmo que devemos juntar ao binômio $x^2 + 11x$, para que o trinômio resultante seja um quadrado perfeito?

$$x^2 + 11x = x^2 + 2 \times x \times \frac{11}{2}$$

Logo, o têrmo pedido é o quadrado de $\frac{11}{2}$ isto é, $\frac{121}{4}$. E teremos:

$$x^2 + 11x + \frac{121}{4} = \left(x + \frac{11}{2}\right)^2$$

8. Mesma pergunta em relação ao binômio $x^2 - 9x$.

$$x^2 - 9x = x^2 - 2 \times x \times \frac{9}{2}$$

O têrmo pedido é $\frac{81}{4}$. E teremos:

$$x^2 - 9x + \frac{81}{4} = \left(x - \frac{9}{2}\right)^2$$

64. Resolução direta da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Se o primeiro membro desta equação fosse um quadrado perfeito, seria muito simples resolvê-la; bastaria extrair a raiz quadrada de ambos os membros e a equação se desdobraria em duas do primeiro grau. Por exemplo:

$$4x^2 + 12x + 9 = 0 \;\therefore\; (2x+3)^2 = 0 \;\therefore\; \left.\begin{matrix} 2x + 3 = 0 \\ 2x + 3 = 0 \end{matrix}\right\} \;\therefore\; \left\{\begin{matrix} x' = -\frac{3}{2} \\ x'' = -\frac{3}{2} \end{matrix}\right.$$

Observamos, porém, na prática, que o trinômio $ax^2 + bx + c$, quasi nunca é quadrado perfeito. Entretanto, mesmo neste caso, já temos recursos para resolver a equação. (§ 63)

I. Resolver a equação $x^2 - 8x + 15 = 0$.

$$\begin{array}{lrcl} (1) & x^2 - 8x + 15 & = & 0 \\ (2) & x^2 - 2 \times x \times 4 + 15 & = & 0 \\ (3) & x^2 - 8x & = & -15 \\ (4) & x^2 - 8x + 16 & = & 16 - 15 \\ (5) & (x-4)^2 & = & 1 \\ (6) & x - 4 & = & \pm 1 \\ (7) & x & = & 4 \pm 1 \end{array}$$

$$\text{R.} \left\{\begin{matrix} x' = 5 \\ x'' = 3 \end{matrix}\right.$$

Desdobramos o têrmo do meio da equação (1), isto é, $8x$. Verificamos assim que o trinômio $x^2 - 8x + 15$ não é um quadrado perfeito. Desembaraçamo-nos do 15, passando-o para o segundo membro. A equação (2) nos mostra que o seu primeiro membro seria um quadrado perfeito, se tivéssemos 16 em lugar de 15. Então somamos 16 a ambos os membros

da equação (3). Resulta assim a equação (4) e, em seguida, a equação (5). Extraímos a raiz quadrada de ambos os membros desta última equação, sem esquecer o duplo sinal no segundo membro. (§ 60) Finalmente, passando 4 para o segundo membro, e efetuando as duas operações indicadas na equação (7), acharemos as duas raízes da equação, isto é, 5 e 3.

II. Resolver a equação $x^2 - 6x - 7 = 0$.

(1) $x^2 - \mathbf{2} \times \boldsymbol{x} \times \mathbf{3} - 7 = 0$ | (3) $x^2 - 6x + 9 = 9 + 7$ | (5) $x - 3 = \pm 4$

(2) $x^2 - 6x = 7$ | (4) $(x-3)^2 = 16$ | (6) $x = 3 \pm 4$

$$\text{R.}\quad \begin{cases} x' = +7 \\ x'' = -1 \end{cases}$$

Observação. Antes do exercício III, convém que os estudantes resolvam algumas (série XXXVI) equações nas quais o coeficiente **b** seja número par.

III. Resolver a equação $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Poderíamos proceder assim:

$$x^2 - \mathbf{2} \times \boldsymbol{x} \times \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}} + 12 = 0$$

$$x^2 - 7x = -12$$

$$x^2 - 7x + \frac{49}{4} = \frac{49}{4} - 12, \text{ etc.}$$

Mas, com um artifício simples e elegante, nós vamos evitar as frações. Retomemos a equação $x^2 - 7x + 12 = 0$. Se multiplicássemos ambos os membros desta equação, **por 2,** teríamos $2x^2 - 14x + 24 = 0$. O coeficiente de x *ficaria sendo um número par,* **mas o têrmo que contém $\mathbf{x^2}$ deixaria de ser um quadrado perfeito.**

Para evitar êste inconveniente, multiplicamos ambos os membros da equação $x^2 - 7x + 12 = 0$, **por 4.** E teremos:

(1) $4x^2 - 28x + 48 = 0$

(2) $4x^2 - \mathbf{2} \times \mathbf{2}\boldsymbol{x} \times \mathbf{7} + 48 = 0$

(3) $4x^2 - 28x = -48$

(4) $4x^2 - 28x + 49 = 49 - 48$

(5) $(2x - 7)^2 = 1$

(6) $2x - 7 = \pm 1$

O têrmo $28x$ da equação (1) é constituído sempre por três fatores: *o fator constante* 2, *a raiz do primeiro quadrado,* $2x$, *e a raiz do segundo quadrado,* 7.

Da equação (6) deduzimos:

$$2x = 7 \pm 1 \quad \therefore \quad x = \frac{7 \pm 1}{2} \quad \therefore \quad \begin{cases} x' = 4 \\ x'' = 3 \end{cases}$$

IV. Resolver a equação $x^2 - 5x - 24 = 0$.

$$x^2 - 5x - 24 = 0$$
$$4x^2 - 20x - 96 = 0$$
$$4x^2 - 2 \times 2x \times 5 - 96 = 0$$
$$4x^2 - 20x = 96$$
$$4x^2 - 20x + 25 = 25 + 96$$
$$(2x - 5)^2 = 121$$
$$2x - 5 = \pm 11$$
$$2x = 5 \pm 11$$
$$x = \frac{5 \pm 11}{2}$$
$$\text{R.}\quad \begin{cases} x' = +8 \\ x'' = -3 \end{cases}$$

Observação. O fim principal do que dissemos neste parágrafo, é preparar os estudantes para bem compreender a dedução da fórmula resolutiva das equações completas do segundo grau com uma incógnita.

65. Resolução indireta da equação $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$. O que dissemos no parágrafo anterior mostra a dificuldade de se resolver uma equação completa do segundo grau com uma incógnita. Entretanto, assim como existe uma fórmula que permite simplificar extraordinàriamente o cálculo dos juros, *também existe uma* **fórmula,** *que permite resolver com mais rapidez as equações completas do segundo grau com uma incógnita.* Vamos deduzí-la.

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0} \qquad \text{(A)}$$

Multipliquemos ambos os membros desta equação por $4a$, para que o primeiro têrmo fique sendo quadrado perfeito, e para que apareça no duplo produto bx o fator constante 2. E teremos:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$
$$4a^2x^2 + \mathbf{2} \times \mathbf{2ax} \times \mathbf{b} = -4ac$$
$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$
$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$
$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

(*Fórmula* A)

E' esta a fórmula resolutiva das equações completas do segundo grau com uma incógnita. Com efeito, na equação A, *os coeficientes* **a, b** *e* **c** *representam números quaisquer;* logo, se tivermos de resolver a equação $3x^2 + 10x + 3 = 0$, não será necessário proceder como ficou indicado no § 64.

Comparemos as duas equações:

$$\left.\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ 3x^2 + 10x + 3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad a = 3, \quad b = 10, \quad c = 3.$$

E, tomando a fórmula A,

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100-36}}{6} \quad \therefore \quad x = \frac{-10 \pm 8}{6} \quad \therefore$$

$$x' = \frac{-10+8}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$x'' = \frac{-10-8}{6} = \frac{-18}{6} = -3$$

$$\text{R.} \begin{cases} x' = -\dfrac{1}{3} \\ x'' = -3 \end{cases}$$

O método que adotámos para deduzir a fórmula resolutiva da equação completa do segundo grau com uma incógnita, é devido a Bhaskara, matemático indú do século XII. (1114-1185) Para melhor memorizá-lo, podemos proceder como segue:

A equação dada é .... $ax^2 + bx + c = 0$

Multiplicando por $4a$ .... $4a^2x^2+4abx+4ac = 0$

Passando $4ac$ para o segundo membro........................ $4a^2x^2+4abx = -4ac$

Somando b^2 a ambos os membros $4a^2x^2+4abx+b^2 = b^2-4ac$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros .... $2ax+b = \pm\sqrt{b^2-4ac}$

Passando b para o segundo membro $2ax = -b \pm \sqrt{b^2-4ac}$

Donde .... $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Os estudantes deverão verificar que:

Da equação $ax^2-bx+c=0$ resulta ... $x = \dfrac{+b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Da equação $ax^2+bx-c=0$ resulta ... $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2+4ac}}{2a}$

Da equação $ax^2-bx-c=0$ resulta ... $x = \dfrac{+b \pm \sqrt{b^2+4ac}}{2a}$

Podemos pois estabelecer as duas regrinhas práticas seguintes:

Primeira. *O sinal de* b *na fórmula é sempre contrário ao sinal de* b *na equação.*

Segunda. *O sinal de* $4ac$ *na fórmula é sempre contrário ao sinal de* c *na equação.*

Devido ao duplo sinal que precede o radical $\sqrt{b^2-4ac}$, a fórmula A pode ser desdobrada em duas, a saber:

$$x' = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x'' = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

E observando que as operações necessárias para calcular x' e x'' são todas operações de resultado único, podemos concluir que, aplicando a fórmula A a uma equação completa do segundo grau, com uma incógnita, acharemos invariavelmente *um valor e sòmente um*, para x', assim como, *um valor e sòmente um*, para x''. Logo,

A equação completa do segundo grau com uma incógnita tem sempre duas raízes, e sòmente duas.

Exercícios em classe

I. Resolver a equação $\dfrac{9}{x} - \dfrac{18}{x^2} = 1.$

E' uma equação fracionária, cuja resolução se reduz à de uma equação do 2.º grau. Com efeito:

Eliminando os denominadores ... $9x - 18 = x^2$

Transpondo .... $-x^2 + 9x - 18 = 0$

Multiplicando por *menos* 1 ...... $x^2 - 9x + 18 = 0$

$$x = \frac{+9 \pm \sqrt{81-72}}{2} \quad \therefore \quad x = \frac{+9 \pm \sqrt{9}}{2} \quad \therefore \quad x = \frac{+9 \pm 3}{2}$$

$$x' = 6 \qquad x'' = 3$$

II. Resolver a equação fracionária $\dfrac{9-x}{2} + \dfrac{4}{x-2} = \dfrac{3(x-1)}{2}.$

O m. m. c. dos denominadores é $2(x-2)$. Eliminando-os, teremos:

$$\begin{aligned} (9-x)(x-2) + 8 &= 3(x-1)(x-2) \\ -x^2 + 11x - 18 + 8 &= 3x^2 - 9x + 6 \\ -x^2 - 3x^2 + 11x + 9x - 18 + 8 - 6 &= 0 \\ -4x^2 + 20x - 16 &= 0 \\ 4x^2 - 20x + 16 &= 0 \\ x^2 - 5x + 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{+5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \quad \therefore \quad x = \frac{+5 \pm \sqrt{9}}{2} \quad \therefore \quad x = \frac{+5 \pm 3}{2}$$

$$x' = 4 \qquad x'' = 1$$

III. Resolver a equação

$$m^2x^2 - (m+n)x = n^2x^2 + (m-n)x - 1$$

Eliminando os parênteses...

$$m^2x^2 - mx - nx = n^2x^2 + mx - nx - 1$$

Transpondo e ordenando...

$$m^2x^2 - n^2x^2 - mx - nx - mx + nx + 1 = 0$$

Reduzindo .... $m^2x^2 - n^2x^2 - 2mx + 1 = 0$

Pondo x^2 em evidência .... $x^2(m^2 - n^2) - 2mx + 1 = 0$

A equação dada está reduzida à forma normal, sendo $a = m^2 - n^2$, $b = -2m$, $c = +1$. Aplicando a fórmula, teremos:

$$x = \frac{+2m \pm \sqrt{4m^2 - 4(m^2 - n^2)}}{2(m^2 - n^2)}$$

$$x = \frac{+2m \pm \sqrt{4m^2 - 4m^2 + 4n^2}}{2(m^2 - n^2)}$$

$$x = \frac{+2m \pm 2n}{2(m^2 - n^2)}$$

$$x = \frac{2(m \pm n)}{2(m+n)(m-n)}$$

$$x = \frac{(m \pm n)}{(m+n)(m-n)}$$

$$x' = \frac{(m+n)}{(m+n)(m-n)}$$

$$x' = \frac{1}{m-n}$$

$$x'' = \frac{(m-n)}{(m+n)(m-n)}$$

$$x'' = \frac{1}{m+n}$$

IV. Resolver a equação $4x^2 - 40x + 73 = 0$

$$x = \frac{+40 \pm \sqrt{1600 - 1168}}{8}$$

$$x = \frac{+40 \pm \sqrt{432}}{8}$$

$$x = \frac{40 \pm \sqrt{2^4 \times 3^2 \times 3}}{8}$$

$$x = \frac{40 \pm 12\sqrt{3}}{8}$$

$$x = \frac{4(10 \pm 3\sqrt{3})}{8}$$

$$x = \frac{10 \pm 3\sqrt{3}}{2}$$

$$x = 5 \pm \frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad \text{(A)}$$

Se extrairmos a raiz quadrada de 432, verificaremos que este número não é quadrado perfeito. Neste caso convém simplificar o radical $\sqrt{432}$. Obtido para x o valor (A), teremos sucessivamente:

$$\sqrt{3} = 1{,}7320508...$$

$$x = 5 \pm \frac{3 \times 1{,}732}{2}$$

$$x = 5 \pm 3 \times 0{,}866$$

$$x = 5 \pm 2{,}598$$

$$\text{R.} \begin{cases} x' = 7{,}598 \\ x'' = 2{,}402 \end{cases}$$

66. Resolução da equação $x^2+px+q=0$. Às vêzes, o coeficiente de x^2, na equação completa do segundo grau, é a unidade. E' o que acontece, por exemplo, com as equações

$$x^2+3x+2 = 0, \quad x^2-7x+12 = 0, \quad x^2+9x-22 = 0, \quad \text{etc.}$$

Em relação a estas equações, é tradicional representar o coeficiente de x por p, e o têrmo conhecido, isto é, o têrmo independente da incógnita, por q. E a forma geral, normal, destas equações, é a seguinte:

$$\boldsymbol{x^2 + px + q = 0}$$

Vamos resolver esta equação. Multiplicando e dividindo o têrmo **px** por **2**, teremos:

$$x^2 + 2 \times x \times \frac{p}{2} + q = 0$$

Verificamos assim que o trinômio $x^2 + px + q$ não é, em geral, um quadrado perfeito. Então passamos q para o segundo membro, e somamos $\frac{p^2}{4}$ a ambos os membros. Teremos:

$$x^2 + px = -q$$

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

(Fórmula B)

Comparando esta fórmula com a equação $x^2+px+q=0$, podemos estabelecer que:

O valor de **x** *na equação* $x^2+px+q=0$ *é igual à metade de* **p**, (com sinal contrário) *mais ou menos a raiz quadrada da diferença entre o quadrado de* $\frac{p}{2}$ *e o têrmo conhecido* **q**.

Observação. Quando **p** é negativo na equação, aparece na fórmula com o sinal positivo; o mesmo acontece com o coeficiente q; é o que os estudantes devem verificar diretamente, isto é, resolvendo as equações $x^2-px+q=0$, $x^2+px-q=0$, $x^2-px-q=0$.

Exercícios em classe

I. Resolver a equação $x^2-20x+75 = 0$.

Nesta equação temos $p = -20$ e $q = 75$. Portanto,

$$x=+10 \pm \sqrt{100-75} \quad \therefore \quad x=+10 \pm 5$$

$$x' = 15 \qquad x'' = 5$$

II. Resolver a equação $x^2-4x-21 = 0$.

$$x=+2 \pm \sqrt{4+21} \quad \therefore \quad x=+2 \pm 5$$

$$x' = 7 \qquad x'' = -3$$

III. Resolver a equação $x^2+5x-24 = 0$.

$$x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}+24} \quad \therefore \quad x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}+\frac{96}{4}}$$

$$x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4}} \quad \therefore \quad x = -\frac{5}{2} \pm \frac{11}{2}$$

$$x' = 3 \qquad x'' = -8$$

IV. Resolver a equação $x^2+4x-10 = 0$.

$$x=-2 \pm \sqrt{4+10} \quad \therefore \quad x=-2 \pm \sqrt{14}$$

Não sendo 14 um quadrado perfeito, calculamos $\sqrt{14}$ com uma aproximação qualquer, por exemplo, com êrro inferior a 0,001; acharemos $\sqrt{14} = 3{,}741$. Portanto,

$$x = -2 \pm 3{,}741\ldots \quad \therefore \quad x' = 1{,}741\ldots \quad x'' = -5{,}741\ldots$$

Exercícios. Série XXXVI (*)

Resolver as equações numéricas seguintes:

1. $x^2-10x+16=0$	4. $x^2-12x+35=0$	7. $x^2+4x+3=0$
2. $x^2-14x+40=0$	5. $x^2-11x+18=0$	8. $x^2+8x+15=0$
3. $x^2-8x+15=0$	6. $x^2-8x+7=0$	9. $x^2+11x+30=0$

(*) Convém ler a Nota da pág. 271.

10. $x^2+12x+35=0$	30. $5x^2+9x-2=0$	50. $x^2-7{,}7x+14{,}62=0$
11. $x^2+15x+44=0$	31. $3x^2+11x-4=0$	51. $x^2-4{,}96x-1{,}248=0$
12. $x^2+18x+65=0$	32. $4x^2+19x-5=0$	52. $x^2+0{,}12x-0{,}032\,5=0$
13. $x^2-29x+100=0$	33. $7x^2+41x-6=0$	53. $x^2-3{,}57x+2{,}878\,2=0$
14. $x^2-18x-495=0$	34. $6x^2-7x+2=0$	54. $x^2+2{,}46x-3{,}64=0$
15. $x^2-34x+289=0$	35. $12x^2-13x+3=0$	55. $x^2-2x-1=0$
16. $x^2+5x-414=0$	36. $15x^2-16x+4=0$	56. $x^2-4x+1=0$
17. $x^2-19x-902=0$	37. $18x^2-15x+2=0$	57. $x^2-6x+4=0$
18. $x^2+13x-2\,120=0$	38. $20x^2-23x+6=0$	58. $x^2+4x-2=0$
19. $3x^2-10x+3=0$	39. $20x^2-11x-3=0$	59. $x^2+6x+4=0$
20. $2x^2-5x+2=0$	40. $12x^2+x-6=0$	60. $2x^2-20x+49=0$
21. $2x^2-7x+3=0$	41. $20x^2+11x-3=0$	61. $25x^2-100x+97=0$
22. $3x^2-7x+2=0$	42. $30x^2-13x-10=0$	62. $9x^2-18x+7=0$
23. $4x^2-21x+5=0$	43. $24x^2-x-3=0$	63. $x^2+2x-74=0$
24. $2x^2-5x-3=0$	44. $10x^2+11x+3=0$	64. $x^2-4x-7=0$
25. $3x^2-11x-4=0$	45. $15x^2+11x+2=0$	65. $x^2-20x+82=0$
26. $4x^2-3x-1=0$	46. $12x^2+17x+6=0$	66. $x^2-16x+44=0$
27. $5x^2-9x-2=0$	47. $30x^2+31x+5=0$	67. $x^2+10x-2=0$
28. $4x^2-19x-5=0$	48. $40x^2+47x+12=0$	68. $x^2-12x-12=0$
29. $2x^2+5x-3=0$	49. $x^2-3{,}5x+2{,}76=0$	69. $x^2-8x-4=0$

70. $x^2-24x+48=0$

Observação. As raízes das equações 1 a 18 são números inteiros, positivos ou negativos. As raízes das equações 19 a 48 são números inteiros ou frações ordinárias. As raízes das equações 49 a 54 são frações decimais; os estudantes devem conservar os coeficientes fracionários, *não devem inteirar os têrmos da equação*, justamente para recordar as regras relativas ao cálculo das frações decimais. As raízes das equações 55 a 70 são números irracionais; estas raízes devem ser simplificadas, de acôrdo com o cálculo dos radicais e, em seguida, avaliadas com êrro inferior a 0,01 ou 0,001 conforme as determinações dos srs. professores ou as conveniências do momento.

71. $\frac{9}{x}-\frac{18}{x^2}=1$	76. $\frac{x-1}{x+3}=\frac{x}{x-3}-2$
72. $\frac{16(x-6)}{6}=\frac{8x}{x-6}$	77. $\frac{x}{x-2}-\frac{2-x}{x}=\frac{5}{2}$
73. $\frac{x^2}{x-2}+\frac{4}{x-2}+5=0$	78. $\frac{3+x}{4+x}-\frac{5-x}{6-x}=\frac{1}{12}$
74. $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+3}{x-3}+\frac{20}{3}=0$	79. $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+3}{x+4}=\frac{22}{15}$
75. $\frac{x+3}{2}+\frac{2}{x+3}=\frac{10}{3}$	80. $\frac{x+1}{x^2-4}+\frac{1-x}{x+2}=\frac{2}{5(x-2)}$

81. $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x+3}{2(x+4)} + \dfrac{1}{18} = 0$

82. $\dfrac{2x-1}{3} - \dfrac{3}{x-8} = \dfrac{6(x-7)}{x-8}$

83. $\dfrac{3x-1}{7-x} - \dfrac{5-4x}{2x+1} = 3$

84. $\dfrac{x+2}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{13}{6}$

85. $\dfrac{3}{2(x^2-1)} - \dfrac{1}{4(x+1)} = \dfrac{1}{8}$

86. $\dfrac{2x+3}{x+3} = \dfrac{x+4}{x}$

87. $\dfrac{4x}{x-1} + \dfrac{x-10}{x} = 4$

88. $\dfrac{x^2}{x-2} + 5 + \dfrac{4}{x-2} = 0$

89. $\dfrac{x}{x-5} - \dfrac{x-5}{x} = \dfrac{3}{2}$

90. $\dfrac{x}{x^2-1} = \dfrac{15-7x}{8(1-x)}$

91. $\dfrac{2x-1}{x-1} - \dfrac{2x-3}{x-2} + \dfrac{1}{6} = 0$

92. $(x+4)\left(\dfrac{72}{x} - 3\right) = 72$

93. $\dfrac{x+3}{6} + \dfrac{x}{x-6} = \dfrac{x+6}{6-x}$

94. $\dfrac{4}{x+2} + \dfrac{5}{x+4} = \dfrac{12}{x+6}$

95. $\dfrac{1}{x+7} + \dfrac{1}{3-x} = \dfrac{2}{5}$

67. Raízes reais e imaginárias; o discriminante. Já aprendemos, na segunda série, como se calcula a área de um retângulo.

Problema I. *Calcular as dimensões de um retângulo cuja área é de $15m^2$, sendo a soma das mesmas dimensões igual a 8m.*

Representando o comprimento do retângulo por x, a largura será $8-x$, e a área será $x \times (8-x)$. Logo,

$$x(8-x) = 15$$
$$8x - x^2 - 15 = 0$$
$$x^2 - 8x + 15 = 0$$
$$x = 4 \pm \sqrt{16-15}$$
$$x = 4 \pm 1$$
$$x' = 5$$
$$x'' = 3$$

Obtivemos para x, comprimento do retângulo, dois valores diferentes, isto é, 5 e 3.

Se tomarmos para comprimento do retângulo, a primeira raiz, isto é, 5, a largura será $8-x$, a saber, 3.

Se tomarmos para comprimento do retângulo, a segunda raiz, isto é, 3, a largura será $8-x$, a saber, 5.

E as dimensões do retângulo serão 5m e 3m.

Quando resolvemos **problemas desta natureza,** *as duas raízes da equação são as duas dimensões do retângulo.*

Mais tarde, quando estudarmos os problemas do segundo grau, completaremos êste assunto. (§75)

Problema II. *Calcular as dimensões de um retângulo, cuja área é de $20m^2$, sendo a soma das mesmas dimensões igual a 8m.*

Representando o comprimento do retângulo por x, a largura será $8-x$, e a área será $x \times (8-x)$. Logo,

$$x(8-x) = 20$$
$$8x - x^2 - 20 = 0$$
$$x^2 - 8x + 20 = 0$$
$$x = 4 \pm \sqrt{16-20}$$
$$x = 4 \pm \sqrt{-4}$$

Ora, $\sqrt{-4}$ é um número imaginário (§56); portanto, as raízes da equação, isto é,

$$\begin{cases} x' = 4 + \sqrt{4(-1)} \\ x'' = 4 - \sqrt{4(-1)} \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} x' = 4 + 2i \\ x'' = 4 - 2i \end{cases}$$

sendo números complexos (§57) serão também chamadas *raízes imaginárias.* E quais são, então, as dimensões do retângulo? Êste retângulo não existe; o problema não tem solução *real.*

Podemos construir muitos retângulos, cuja soma das dimensões seja sempre a mesma; a área dêstes retângulos varia, *sem poder exceder um certo limite.* Se, no problema proposto, é dada uma área superior a êste limite, o retângulo não existe, e suas dimensões adquirem valores imaginários.

Para os estudantes que estão interessados neste assunto, surge então uma questão interessante. Sendo a soma das dimensões de uma piscina retangular igual, por exemplo, a 48 metros, *qual será a área máxima desta piscina?* Em primeiro lugar, verifiquemos, pràticamente, que *a área da piscina pode variar, sem que a soma das dimensões varie.* **Exemplifiquemos.**

comprimento	*largura*	*soma das dimensões*	*área*
47m.	1m.	48m.	$47m^2$
46m.	2m.	48m.	$92m^2$
45m.	3m.	48m.	$135m^2$
44m.	4m.	48m.	$176m^2$
40m.	8m.	48m.	$320m^2$
30m.	18m.	48m.	$540m^2$
16m.	32m.	48m.	$512m^2$
12m.	36m.	48m.	$432m^2$
6m.	42m.	48m.	$252m^2$

Quais as dimensões que devemos então dar a esta piscina, para que a sua área seja a maior possível, *seja máxima?*

Para resolver êste problema, de um modo completo, nós vamos generalizá-lo.

Generalização. *Calcular as dimensões de um retângulo, cuja área é* P, *sendo a soma das dimensões igual a* S.

Representando o comprimento do retângulo por x, a largura será $S-x$, e a área, $x \times (S-x)$. Portanto,

$$x(S-x) = P$$
$$Sx - x^2 - P = 0$$
$$x^2 - Sx + P = 0$$
$$x = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}$$

Observando o radicando notamos logo que, para que as raízes sejam reais, devemos ter $P < \frac{S^2}{4}$, ou, no máximo, $P = \frac{S^2}{4}$. E atribuindo a P êste valor máximo, teremos:

$$x' = \frac{S}{2} \qquad x'' = \frac{S}{2}$$

Conclusão. *Para que o problema proposto seja possível, é necessário que a área dada seja igual, no máximo, à quarta parte do quadrado da soma das dimensões.* E quando a área do retângulo é máxima, as duas dimensões do retângulo são iguais, isto é, o retângulo é, na realidade, um quadrado.

Por exemplo, a soma das dimensões de um retângulo sendo 20m, a área pode ser $36m^2$, (18×2); $84m^2$ (14×6); $96m^2$ (12×8), $100m^2$ (10×10). Esta é a área máxima. Entretanto, a área não pode ser superior a $100m^2$, por exemplo, $120m^2$. Com efeito, tomando a relação $P < \frac{S^2}{4}$, verificamos que 120 é maior que a quarta parte do quadrado de 20.

Voltemos à fórmula A. (§ 65)

O binômio $b^2 - 4ac$ *é chamado* **discriminante** *da equação do segundo grau.* O discriminante depende dos valores numéricos dos coeficientes a, b, c; é uma função dêstes três coeficientes.

Na prática, quando resolvemos equações completas do segundo grau, podem dar-se três casos distintos.

I. $b^2 - 4ac > 0 \quad \therefore \quad b^2 > 4ac$

Neste caso, o radical $\sqrt{b^2 - 4ac}$ tem dois valores simétricos, isto é, iguais em valor absoluto, porém com sinais contrários. E a equação terá duas raízes reais e diferentes. (§ 65)

Observação. Se o discriminante $b^2 - 4ac$ é quadrado perfeito, as duas raízes são números racionais; no caso contrário, são números irracionais.

II. $b^2 - 4ac = 0 \quad \therefore \quad b^2 = 4ac$

Neste caso, o valor do radical é nulo, e a equação terá ainda duas raízes reais e iguais, a saber:

$$x' = \frac{-b+0}{2a} \qquad x'' = \frac{-b-0}{2a}$$
$$x' = -\frac{b}{2a} \qquad x'' = -\frac{b}{2a}$$

III. $b^2 - 4ac < 0 \quad \therefore \quad b^2 < 4ac$

Neste caso, o radical é um número imaginário; representando o discriminante $b^2 - 4ac$ por $-D$, teremos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{-D}}{2a} \quad \therefore \quad x = \frac{-b \pm i\sqrt{D}}{2a} \quad \therefore$$
$$x' = \frac{-b + i\sqrt{D}}{2a} \qquad x'' = \frac{-b - i\sqrt{D}}{2a}$$

As duas raízes são imaginárias, complexas e conjugadas.

Exercícios orais

Sem resolver as equações que se seguem, dizer se as suas raízes são reais ou imaginárias, iguais ou desiguais, racionais ou irracionais.

1. $x^2+4x+3=0$	6. $x^2+5x+7=0$	11. $3x^2+x-3=0$
2. $x^2-4x+4=0$	7. $x^2+6x+9=0$	12. $3x^2-7x+2=0$
3. $x^2+4x+5=0$	8. $x^2+8x+15=0$	13. $5x^2+2x-1=0$
4. $x^2+3x-3=0$	9. $x^2+x-6=0$	14. $4x^2-3x-1=0$
5. $x^2-2x-4=0$	10. $2x^2-5x+2=0$	15. $x^2+2x+5=0$

68. Discussão da fórmula resolutiva da equação $ax^2+bx+c=0$. A fórmula resolutiva desta equação é:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{(Fórmula A) (§ 65)}$$

Observação. Discutindo esta fórmula, não suporemos $a = 0$ porque, neste caso, a equação dada não será do segundo grau; será do primeiro. Também não imaginaremos $b = 0$, porque, então, a equação dada será uma equação incompleta, da forma $ax^2+c=0$, equação esta que já foi estudada e discutida. (§ 62). Finalmente, não estabeleceremos a hipótese $c = 0$, porque, neste caso, a equação dada será uma equação incompleta, da forma $ax^2 + bx = 0$, equação esta que já foi estudada e discutida. (§ 61)

Em primeiro lugar, sendo $\sqrt{b^2} = b$, é evidente que:

$$\sqrt{b^2 + 4ac} > b \qquad \sqrt{b^2 - 4ac} < b$$

Isto pôsto, vamos estabelecer quatro hipóteses.

Primeira hipótese. $b>0$, $c>0$.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \therefore \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x' = \frac{-b + \text{um número menor que } b}{2a} \quad \therefore \quad x' < 0$$

$$x'' = \frac{-b - \text{um número menor que } b}{2a} \quad \therefore \quad x'' < 0$$

As duas raízes, *se não forem imaginárias*, **serão ambas negativas.** Em valor absoluto, teremos $x' < x''$; mas, *em valor relativo*, $x' > x''$.

Segunda hipótese. $b<0$, $c>0$.

$$ax^2 - bx + c = 0 \quad \therefore \quad x = \frac{+b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x' = \frac{+b + \text{um número menor que } b}{2a} \quad \therefore \quad x' > 0$$

$$x'' = \frac{+b - \text{um número menor que } b}{2a} \quad \therefore \quad x'' > 0$$

As duas raízes, *se não forem imaginárias*, **serão ambas positivas.** Em valor absoluto ou relativo, teremos $x' > x''$.

Terceira hipótese. $b > 0$, $c < 0$.

$$ax^2 + bx - c = 0 \quad \therefore \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2+4ac}}{2a}$$

$$x' = \frac{-b + \text{um número maior que } b}{2a} \quad \therefore \quad x' > 0$$

$$x'' = \frac{-b - \text{um número maior que } b}{2a} \quad \therefore \quad x'' < 0$$

As duas raízes serão reais **e com sinais contrários.** Em *valor absoluto* teremos $x' < x''$, mas, em *valor relativo*, $x' > x''$.

Quarta hipótese. $b < 0$, $c < 0$.

$$ax^2 - bx - c = 0 \quad \therefore \quad x = \frac{+b \pm \sqrt{b^2+4ac}}{2a}$$

$$x' = \frac{+b + \text{um número maior que } b}{2a} \quad \therefore \quad x' > 0$$

$$x'' = \frac{+b - \text{um número maior que } b}{2a} \quad \therefore \quad x'' < 0$$

As duas raízes serão reais* e com sinais contrários.** Em ***valor absoluto ou relativo teremos: $x' > x''$

Resumo

1.º)	$b > 0,\ c > 0$	$x' < 0,\ x'' < 0$
2.º)	$b < 0,\ c > 0$	$x' > 0,\ x'' > 0$
3.º)	$b > 0,\ c < 0$	$x' > 0,\ x'' < 0$
4.º)	$b < 0,\ c < 0$	$x' > 0,\ x'' < 0$

Êste quadro nos permite determinar o sinal das raízes da equação do segundo grau, *pela inspeção dos sinais dos coeficientes ou parâmetros* **b** *e* **c.** Entretanto, veremos adiante (§ 70) outro processo para conseguir êste resultado.

69. Relações entre os coeficientes e as raízes. A equação completa do segundo grau com uma incógnita, pode sempre ser reduzida à seguinte forma normal:

$$x^2+px+q=0 \qquad \text{(A)}$$

Com efeito, si o parâmetro a for diferente da unidade, é bastante dividir ambos os membros da equação por a. Por exemplo:

$$3x^2 + 7x + 10 = 0 \quad \therefore \quad x^2 + \frac{7x}{3} + \frac{10}{3} = 0$$

$$2x^2 + 8x + 8 = 0 \quad \therefore \quad x^2 + 4x + 4 = 0$$

Resolvendo a equação A, teremos:

$$\text{(B)} \quad x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \qquad\qquad x'' = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{(C)}$$

Somando as equações B e C, resulta:

$$x' + x'' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} - \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x' + x'' = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} \quad \therefore \quad x' + x'' = -\frac{2p}{2}$$

$$\boldsymbol{x' + x'' = -p} \qquad \text{(M)}$$

Multiplicando as equações B e C, resulta:

$$x'x'' = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)$$

$$x'x'' = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 \qquad \text{(E.M.T.A. § 35, III)}$$

$$x'x'' = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) \quad \therefore \quad \boldsymbol{x'x'' = q} \qquad \text{(N)}$$

As equações M e N são a tradução, em linguagem algébrica, de duas relações notáveis existentes entre as raízes e os parâmetros da equação $x^2 + px + q = 0$, e que podem assim ser enunciadas em linguagem vulgar:

Estando a equação completa do segundo grau com uma incógnita, reduzida à forma $\mathbf{x^2+px+q=0}$,

Primeiro. *A soma das raízes é igual ao coeficiente* **p**, *com sinal contrário.* E' a relação M.

Segundo. *O produto das raízes é igual ao coeficiente* **q**. E' a relação N.

Por exemplo, dada a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, a soma das raízes é $+5$ e o produto é $+6$.

Em relação à equação $x^2 + 7x + 10 = 0$, a soma das raízes é -7 e o produto é $+10$.

Considerando a equação $3x^2 + 5x - 8 = 0$, podemos dividir ambos os membros da mesma por 3, resultando a equação...

$x^2 + \frac{5x}{3} - \frac{8}{3} = 0$. Portanto, em relação à equação $3x^2+5x-8=0$, a soma das raízes é $-\frac{5}{3}$ e o produto é $-\frac{8}{3}$.

Finalmente, considerando a equação

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \therefore \quad x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

teremos:

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} \qquad x'x'' = \frac{c}{a}$$

70. Aplicações das relações M e N. Estas duas relações têm aplicações importantes.

Observação. Em tudo o que se segue, admitiremos sempre que as raízes são reais, isto é, $\frac{p^2}{4} \geq q$.

Primeira aplicação. O exame dos coeficientes de uma equação do segundo grau com uma incógnita nos permite, *às vêzes*, determinar por tentativas as raízes, sem resolver a equação. Por exemplo,

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \quad \therefore \quad \begin{cases} x' + x'' = 7 \\ x'x'' = 10 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} x' = 5 \\ x'' = 2 \end{cases}$$

$$x^2 + 8x + 15 = 0 \quad \therefore \quad \begin{cases} x' + x'' = -8 \\ x'x'' = 15 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} x' = -3 \\ x'' = -5 \end{cases}$$

Notemos, em virtude da relação $x'x'' = q$, que, se a equação tem raízes inteiras, estas raízes são divisores de q.

Segunda aplicação. O exame dos sinais dos coeficientes de uma equação do segundo grau com uma incógnita, nos permite dizer quais são os sinais das raízes da equação, sem resolvê-la.

Observemos em primeiro lugar que, de acôrdo com a relação N, se tivermos $q > 0$, isto é, *positivo*, **ou as duas raízes são positivas, ou as duas raízes são negativas.**

Entretanto, se tivermos $q < 0$, isto é, *negativo*, **as duas raízes terão sinais contráoris,** isto é, *uma positiva, e a outra, negativa.*

Vejamos agora quais são os sinais das raízes da equação $x^2 + px + q = 0$. Temos quatro casos a considerar.

$$1.^{\circ}) \quad x^2 + px + q = 0 \quad \therefore \quad \begin{cases} x' + x'' = -p \\ x'x'' = +q \end{cases}$$

O produto das raízes é positivo; mas a soma é negativa; logo, **as duas raízes são negativas.**

2.º) $x^2 - px + q = 0 \quad \therefore \quad \begin{cases} x'+x'' = +p \\ x'x'' = +q \end{cases}$

O produto das duas raízes é positivo, e a soma também; logo, **as duas raízes são positivas.**

3.º) $x^2 + px - q = 0 \quad \therefore \quad \begin{cases} x'+x'' = -p \\ x'x'' = -q \end{cases}$

Lembremos que, em valor relativo, temos sempre $x' > x''$.

O produto das duas raízes é negativo; logo, **as duas raízes têm sinais contrários.** E, em virtude da relação $x' > x''$, resulta $x' > 0$ e $x'' < 0$, isto é, x' positivo e x'' negativo. Qual é, em valor absoluto, a maior das duas? E' a segunda; é x'' porque a *soma das duas raízes é negativa* e, quando somamos dois números com sinais contrários, o sinal da soma é determinado pela parcela cujo valor absoluto é maior.

4.º) $x^2 - px - q = 0 \quad \therefore \quad \begin{cases} x'+x'' = +p \\ x'x'' = -q \end{cases}$

Como no terceiro caso, teremos x' positivo e x'' negativo. Qual é, em valor absoluto, a maior das duas raízes? E' a primeira; é x', porque *a soma das duas raízes é positiva* e, quando somamos dois números com sinais contrários, o sinal da soma é determinado pela parcela cujo valor absoluto é maior.

Terceira aplicação. E' a composição de uma equação cujas raízes são números dados. Por exemplo, qual é a equação cujas raízes são $\frac{2}{3}$ e $-\frac{3}{5}$?

$$x' = \frac{2}{3} \qquad x'' = -\frac{3}{5}$$

$$x'+x'' = \frac{2}{3} - \frac{3}{5}$$

$$x'+x'' = \frac{1}{15}$$

$$x'x'' = \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$x'x'' = -\frac{2}{5}$$

A equação pedida é do segundo grau com uma incógnita, visto que deve ter duas raízes. Estas, sendo diferentes de zero, e não sendo simétricas, a equação que vamos formar é uma equação completa do segundo grau e, portanto da forma

$$x^2 + px + q = 0$$

Ora, $x'+x'' = \frac{1}{15} \quad \therefore \quad p = -\frac{1}{15}$

$x'x'' = -\frac{2}{5} \quad \therefore \quad q = -\frac{2}{5}$

Portanto, a equação pedida é:

$$x^2 - \frac{x}{15} - \frac{2}{5} = 0 \quad \therefore \quad 15x^2 - x - 6 = 0$$

A disposição prática dêste exercício pode ser a seguinte:

I. Formar uma equação cujas raízes sejam $+\frac{3}{4}$ e $-0{,}9$.

$$x' = +\frac{3}{4}$$

$$x'' = -\frac{9}{10}$$

$$x'+x'' = \frac{3}{4} - \frac{9}{10}$$

$$\therefore \quad x'+x'' = -\frac{3}{20}$$

$$x'x'' = \frac{3}{4}\left(-\frac{9}{10}\right) = -\frac{27}{40}$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$p = \frac{3}{20} \quad q = -\frac{27}{40}$$

$$x^2 + \frac{3x}{20} - \frac{27}{40} = 0$$

$$40x^2 + 6x - 27 = 0$$

Resposta. A equação pedida, em sua forma mais simples, isto é, com coeficientes inteiros é:

$$40x^2 + 6x - 27 = 0.$$

II. Formar uma equação cujas raízes sejam $3 \pm \sqrt{2}$.

$$x' = 3 + \sqrt{2}$$

$$x'' = 3 - \sqrt{2}$$

$$x' + x'' = 6$$

$$x'x'' = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})$$

$$x'x'' = 7$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$p = -6 \qquad q = 7$$

$$x^2 - 6x + 7 = 0$$

Resposta. A equação pedida, em sua forma mais simples, isto é, com coeficientes inteiros, é:

$$x^2 - 6x + 7 = 0.$$

Quarta aplicação. Determinar dois números dos quais se conhece a soma e o produto. (§ 67) Vamos resolver êste problema, de um modo mais rápido e elegante.

I. *Quais são as dimensões de um retângulo cuja área é de* $15m^2$, *sendo a soma das mesmas dimensões igual a* $8m$?

Sejam x e y as dimensões do retângulo; de acôrdo com o enunciado temos:

$$x + y = 8 \qquad xy = 15$$

Portanto, x e y são as raízes de uma equação do segundo grau, da forma $z^2 + pz + q = 0$, na qual $p = -8$ e $q = +15$. E' bastante, pois, resolver a equação

$$z^2 - 8z + 15 = 0 \quad \therefore$$
$$z = 4 \pm \sqrt{16 - 15} \quad \therefore$$
$$z = 4 \pm 1 \quad \therefore \quad \begin{Bmatrix} x = 5 \\ y = 3 \end{Bmatrix}$$

Resposta. As dimensões do retângulo são 5m e 3m.

II. *Determinar dois números cujo produto é 40 e cuja soma é 13.*

$$x^2 - 13x + 40 = 0 \quad \therefore \quad x = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - 40} \quad \therefore \quad x = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \quad \therefore$$

$$x = \frac{13}{2} \pm \frac{3}{2} \quad \therefore \quad \begin{Bmatrix} x' = 8 \\ x'' = 5 \end{Bmatrix}$$

Resposta. Os dois números pedidos são 8 e 5.

III. *Determinar dois números cuja soma é* **s**, *e cujo produto é* **p.**

$$x^2 - sx + p = 0 \quad \therefore \quad x = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - p} \quad \therefore \quad x = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2 - 4p}{4}} \quad \therefore$$

$$x = \frac{s}{2} \pm \frac{\sqrt{s^2 - 4p}}{2} \quad \therefore \quad \begin{Bmatrix} x' = \dfrac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2} \\[2ex] x'' = \dfrac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2} \end{Bmatrix}$$

O problema III é uma *generalização*, e os dois valores de x são as duas *fórmulas* necessárias para resolvê-lo. O problema é possível, quando o valor máximo de $4p$ é s^2. (§ 67)

Exercícios orais

1. Resolver, pelo exame dos coeficientes, as equações 1 a 12 da série XXXVI.

2. Dizer os sinais das raízes das equações 1 a 48 da série XXXVI e dizer também qual das duas raízes é a maior em valor absoluto.

Exercícios. Série XXXVII

Formar equações cujas raízes sejam:

1. 7 e 5

2. -11 e -12

3. 8 e -7

4. 10 e -3

5. 4 e $\frac{2}{5}$

6. $\frac{3}{4}$ e -6

7. $\frac{5}{6}$ e $\frac{1}{4}$

8. 7 e $-\frac{2}{3}$

9. -3 e $-4\frac{1}{2}$

10. $2\frac{1}{2}$ e $1\frac{3}{4}$

11. 4,2 e 0,8

12. 2,5 e 1,6

13. $\frac{4}{5}$ e $-0,2$

14. $-0,3$ e $\frac{7}{100}$

15. 0 e 7

16. 1,5 e 0

17. $\frac{3}{4}$ e 0

18. $-0,6$ e 0

19. $\pm 0,5$

20. $\pm \frac{3}{5}$

21. $2 \pm \sqrt{3}$

22. $3 \pm \sqrt{2}$

23. $5 \pm \sqrt{3}$

24. $3 \pm \sqrt{5}$

25. $1 \pm \sqrt{6}$

26. $2 \pm \sqrt{7}$

27. $1 \pm \sqrt{-2}$

28. $2 \pm \sqrt{-1}$

29. $3 \pm \sqrt{-5}$

30. $2 \pm \sqrt{-3}$

31. $5 \pm 2i$

32. $3 \pm 4i$

33. $\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$

34. $\sqrt{3} \pm \sqrt{5}$

35. $\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$

36. $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$

37. $\frac{2 \pm \sqrt{2}}{3}$

38. $\frac{5 \pm \sqrt{2}}{3}$

39. $\frac{2 \pm i\sqrt{2}}{3}$

40. $\frac{3 \pm i\sqrt{2}}{3}$

41. $\frac{a}{2}$ e $\frac{a}{3}$

42. $\frac{2a}{3}$ e $\frac{3a}{2}$

43. $\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{b}$

44. $\frac{a}{b}$ e $\frac{b}{a}$

45. $\frac{1}{m}$ e $\frac{1}{n}$

46. $\frac{1}{a+b}$ e $\frac{1}{a-b}$

47. $(a+b)$ e $(a-b)$

48. $(2m+3)$ e $(2m-3)$

49. $(m+n)$ e $(m-n)$

50. Dada a equação $x^2 - 10x + m = 0$, qual deve ser o valor de m para que a diferença entre as raízes seja 4?

O parâmetro m é o produto das duas raízes da equação; precisamos, em primeiro lugar, determinar as duas raízes.

As duas raízes são x' e x''. Sua soma é 10 e o problema exige que sua diferença seja 4. E' necessário resolver o seguinte sistema:

$$\begin{Bmatrix} x' + x'' = 10 \\ x' - x'' = 4 \end{Bmatrix} \quad \therefore \quad \begin{Bmatrix} x' = 7 \\ x'' = 3 \end{Bmatrix}$$

Ora, sendo m o produto das duas raízes, teremos $m = 7 \times 3 = 21$.

Resposta. O parâmetro m deve ser igual a 21.

51. $x^2 - 19x + m = 0$. Qual deve ser o valor de m, para que $x' - x'' = 5$?

52. $x^2 - 10x + m = 0$. Qual deve ser o valor de m, para que $x' - x'' = 3$?

53. $x^2 - 15x + m = 0$. Qual deve ser o valor de m, para que $x' - x'' = 5$?

54. $3x^2 - 10x + m = 0$. Qual deve ser o valor de m, para que $x' - x'' = 8/3$?

Lembrar que $x' + x'' = 10/3$.

55. $3x^2 - 7x + m = 0$. Qual deve ser o valor de m, para que $x' - x'' = 5/3$?

56. $2x^2 + 5x - m = 0$. Qual deve ser o valor de m, para que $x' - x'' = -7/2$?

57. $5x^2 + 9x - m = 0$. Qual deve ser o valor de m, para que $x' - x'' = -9/5$?

58. $x^2 - 6x + m = 0$. Qual deve ser o valor de m, para que $x' \div x'' = 1/3$?

59. $3x^2 - 5x + m = 0$. Qual deve ser o valor de m, para que $x' \div x'' = 1/2$?

60. $x^2 + px + 54 = 0$. Qual deve ser o valor de p, para que $x' \div x'' = 6$?

61. $3x^2 + px + 3 = 0$. Qual deve ser o valor de p, para que $x' \div x'' = 9$?

71. O trinômio do segundo grau. E' uma expressão algébrica racional e inteira da forma $\mathbf{ax^2+bx+c}$. (E.M.T.V. § 56, V) As expressões algébricas

$$5x^2-7x+3, \qquad -4x^2+9x-8, \qquad 3x^2+5x+1$$

são trinômios do segundo grau.

O trinômio do segundo grau tem uma infinidade de valores numéricos. Êste valor numérico varia de acôrdo com o valor numérico atribuído à letra x, a única letra que figura no trinômio. A letra x é a **variável independente.** Quanto ao trinômio, seu valor numérico depende do valor numérico de x; dizemos, neste caso, que o trinômio é **uma função de** x, e o representamos por y, letra esta que recebe o nome de **variável dependente ou variável função** ou, simplesmente, **função.** (§ 2)

No trinômio $3x^2-5x+7$, os coeficientes 3, 5 e 7 são *constantes absolutas.* No trinômio ax^2+bx+c, os coeficientes a, b e c são *constantes arbitrárias* ou **parâmetros.** (§ 2)

O parâmetro **a**, do trinômio do segundo grau, **pode ser positivo ou negativo.**

Chamam-se **raízes** *de um trinômio do segundo grau, as raízes que se obtém,* **igualando o mesmo trinômio a zero,** *e resolvendo a equação resultante.* Seja o trinômio $-x^2+7x-12$. Igualando-o a zero e resolvendo a equação resultante, acharemos $x'=4$ e $x''=3$. E diremos que as raízes do trinômio $-x^2+7x-12$ são 4 e 3. Portanto.

As raízes de um trinômio do segundo grau são os valores de **x** *que anulam o mesmo trinômio, isto é, são os valores de* **x** *para os quais, o valor numérico do trinômio é igual a zero.*

O valor numérico de um trinômio do segundo grau *é igual a* **zero,** quando se substitue x por uma das raízes do trinômio; *é diferente de* **zero,** quando se substitue x por um número qualquer que não é raiz do trinômio.

Vejamos agora qual a regra geral para decompor em fatores um trinômio do segundo grau.

Teorema. *O trinômio do segundo grau é igual ao produto* $\mathbf{a(x-x')(x-x'')}$.

Tomando o trinômio ax^2+bx+c e pondo a em evidência, teremos:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}\right) \qquad (1)$$

Lembrando que (§ 69, fim)

$$\frac{b}{a}=-(x'+x'') \qquad \frac{c}{a}=x'x''$$

e substituindo em (1) resulta:

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2-(x'+x'')x+x'x''\right]$$

Fatorando a expressão entre colchetes (E.M.T.V. § 56, II)

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2-x'x-x''x+x'x''\right] \quad \therefore$$
$$ax^2+bx+c=a\left[x(x-x')-x''(x-x')\right] \quad \therefore$$
$$ax^2+bx+c=a\left[(x-x')(x-x'')\right] \quad \therefore$$
$$ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'') \qquad \text{C.Q.D.}$$

Exercícios. Série XXXVIII

1. Fatorar o trinômio $2x^2-11x+5$.

Igualando-o a zero, para determinar as suas raízes, teremos:

$$2x^2-11x+5=0$$
$$x=\frac{11\pm\sqrt{121-40}}{4}$$
$$x=\frac{11\pm 9}{4}$$
$$x'=5 \qquad x''=\frac{1}{2}$$

$$ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'')$$
$$2x^2-11x+5=2(x-5)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$
$$2x^2-11x+5=(x-5)(2x-1)$$

Resposta. $2x^2-11x+5=(x-5)(2x-1)$

2. Fatorar o trinômio $-2x^2+11x-5$.

Igualando-o a zero, para determinar as suas raízes, teremos $x'=5$ e $x''=\frac{1}{2}$. A fórmula de fatoração é:

$$ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'')$$

Logo,

$$-2x^2+11x-5=-2(x-5)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$
$$-2x^2+11x-5=(x-5)(-2x+1)$$
$$-2x^2+11x-5=(x-5)(1-2x)$$

3. Fatorar o trinômio $6x^2 - x - 70$.

Igualando-o a zero, para determinar as suas raízes, teremos:

$$6x^2 - x - 70 = 0$$

$$x' = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 1680}}{12}$$

$$x = \frac{1 \pm 41}{12}$$

$$x' = \frac{7}{2} \qquad x'' = -\frac{10}{3}$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$$

$$6x^2 - x - 70 = 6\left(x - \frac{7}{2}\right)\left(x + \frac{10}{3}\right)$$

$$6x^2 - x - 70 = 2 \times 3\left(x - \frac{7}{2}\right)\left(x + \frac{10}{3}\right)$$

$$6x^2 - x - 70 = (2x - 7)(3x + 10)$$

4. Fatorar $x^2 - 2x - 1$.

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x = 1 \pm \sqrt{1 + 1}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$x' = 1 + \sqrt{2}$$

$$x'' = 1 - \sqrt{2}$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$$

$$x^2 - 2x - 1 = (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$$

5. Fatorar $x^2 - 2x + 4$.

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$x = 1 \pm \sqrt{1 - 4}$$

$$x = 1 \pm i\sqrt{3}$$

$$x' = 1 + i\sqrt{3}$$

$$x'' = 1 - i\sqrt{3}$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$$

$$x^2 - 2x + 4 = (x - 1 - i\sqrt{3})(x - 1 + i\sqrt{3})$$

Fatorar os trinômios que se seguem.

6. $5x^2 - 9x - 2$
7. $4x^2 - 19x - 5$
8. $7x^2 + 41x - 6$
9. $-18x^2 + 15x - 2$
10. $-2x^2 - 5x + 3$
11. $-5x^2 - 9x + 2$
12. $-6x^2 + 7x - 2$
13. $15x^2 - 16x + 4$
14. $3x^2 + 11x - 4$
15. $-12x^2 + 13x - 3$
16. $-20x^2 + 23x - 6$
17. $12x^2 + x - 6$
18. $x^2 - 4x + 1$
19. $x^2 - 6x + 4$
20. $x - 4x + 2$
21. $x^2 + 6x + 4$
22. $2x^2 - 20x + 49$
23. $25x^2 - 100x + 97$
24. $x^2 - 24x + 48$
25. $x^2 + 10x - 2$
26. $x^2 - 20x + 82$
27. $x^2 - 4x + 6$
28. $x^2 - 6x + 14$

Simplificar as frações algébricas que se seguem.

29. $\dfrac{x^2 - 2x - 15}{x^2 + 7x + 12}$
30. $\dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + 7x + 10}$
31. $\dfrac{2x^2 - 3x - 2}{2x^2 + 7x + 3}$
32. $\dfrac{3x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 5x - 2}$
33. $\dfrac{3x^2 - 10x + 3}{2x^2 - 7x + 3}$
34. $\dfrac{3x^2 - 10x + 3}{3x^2 - 7x + 2}$
35. $\dfrac{3x^2 - 7x + 2}{5x^2 - 9x - 2}$
36. $\dfrac{4x^2 - 3x - 1}{4x^2 - 19x - 5}$
37. $\dfrac{3x^2 - 7x + 2}{3x^2 + 11x - 4}$

CAPÍTULO VI

Problemas do Segundo Grau

72. Equações biquadradas. A equação biquadrada é uma equação do quarto grau, com uma incógnita, e que contém sòmente potências pares da incógnita. As equações

$$3x^4 - 5x^2 + 7 = 0 \qquad 5y^4 + 3y^2 - 10 = 0 \qquad z^4 - 3z^2 + 5 = 0$$

são equações biquadradas.

A forma normal de uma equação biquadrada é:

$$\boldsymbol{ax^4 + bx^2 + c = 0} \qquad \text{(A)}$$

Para resolver esta equação, recorremos a um artifício muito simples; fazemos

$$\boldsymbol{x^2 = y} \qquad \text{(B)}$$

e, conseqüentemente, $x^4 = y^2$. Tomando a equação (A) e substituindo x^4 por y^2, e x^2 por y, teremos:

$$ay^2 + by + c = 0 \qquad \text{(C)}$$

A equação (C) é chamada *resolvente quadrática* da equação (A). Resolvendo a equação (C), teremos:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Mas, $y = x^2$ (equação B). Portanto,

$$x^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Finalmente, extraindo a raiz quadrada de ambos os membros desta última equação, resulta:

$$\boldsymbol{x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}} \qquad \left[\textit{Fórmula}\right]$$

E' esta a fórmula de resolução da equação biquadrada. Ela nos mostra que esta equação tem quatro raízes, a saber:

$$x_1 = +\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \qquad x_3 = +\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \qquad x_4 = -\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Observando com atenção a primeira e a segunda raízes, notamos que elas são iguais em valor absoluto, porém com sinais contrários; logo, são *simétricas*. O mesmo acontece com a terceira e a quarta. Portanto, podemos escrever:

$$x_1 = -x_2 \qquad x_3 = -x_4$$

Ora, a esta conclusão poderíamos ter chegado, antes mesmo de resolver a equação. Consideremos, por exemplo, a equação $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$. Se uma das raízes desta equação é $+2$ (o aluno deve verificar) é claro que -2 é também raiz desta equação. Com efeito, é indiferente elevar $+2$ ou -2 ao quadrado ou à quarta potência; os resultados serão iguais.

$$x^4 - 29x^2 + 100 = 0$$

$$(+2)^4 - 29(+2)^2 + 100 = 0 \quad \therefore \quad 16 - 116 + 100 = 0 \quad \therefore \quad 0 = 0$$

$$(-2)^4 - 29(-2)^2 + 100 = 0 \quad \therefore \quad 16 - 116 + 100 = 0 \quad \therefore \quad 0 = 0$$

Na equação biquadrada, o coeficiente de x^2, e o de x^0, isto é, do têrmo independente de x, podem ser positivos ou negativos; mas o coeficiente de x^4 *pode ser suposto sempre positivo* porque, se for negativo, multiplicaremos ambos os membros da equação por -1. Por exemplo, se tivermos de resolver a equação.... $-4x^4 + 37x^2 - 9 = 0$, deveremos, em primeiro lugar, multiplicar ambos os membros desta equação por -1. Resultará a equação $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$.

O primeiro membro de uma equação biquadrada reduzida à forma normal, isto é, o primeiro membro da equação (A), é um polinômio incompleto porque não contém a primeira e a terceira potências de x. Portanto, a equação biquadrada é sempre incompleta. E, quando a equação biquadrada não contém a

segunda potência de x, ou a primeira, ou ambas, damos-lhe o nome de *equação biquadrada reduzida*. Por exemplo, as equações

$$x^4 + 8x^2 = 0 \qquad x^4 - 16 = 0 \qquad x^4 = 0$$

são equações biquadradas reduzidas.

Exercício. Resolver a equação $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

$$x = \pm\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2}} \quad \therefore \quad x = \pm\sqrt{\frac{5 \pm 3}{2}}$$

$$x_1 = +\sqrt{\frac{5+3}{2}} \quad \therefore \quad x_1 = +2 \qquad x_3 = +\sqrt{\frac{5-3}{2}} \quad \therefore \quad x_3 = +1$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{5+3}{2}} \quad \therefore \quad x_2 = -2 \qquad x_4 = -\sqrt{\frac{5-3}{2}} \quad \therefore \quad x_4 = -1$$

Resposta. As raízes da equação dada são ± 2 e ± 1.

Exercícios. Série XXXIX

Resolver as equações biquadradas seguintes:

1. $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$
2. $x^4 - 50x^2 + 49 = 0$
3. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
4. $x^4 - 41x^2 + 400 = 0$
5. $x^4 - 104x^2 + 400 = 0$
6. $x^4 - 125x^2 + 2\,500 = 0$
7. $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$
8. $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$
9. $9x^4 - 82x^2 + 9 = 0$
10. $9x^4 - 37x^2 + 4 = 0$
11. $25x^4 - 26x^2 + 1 = 0$
12. $16x^4 - 25x^2 + 9 = 0$
13. $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$
14. $100x^4 - 41x^2 + 4 = 0$
15. $144x^4 - 73x^2 + 4 = 0$
16. $100x^4 - 29x^2 + 1 = 0$
17. $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$
18. $x^4 - 28x^2 + 75 = 0$
19. $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$
20. $x^4 - 21x^2 + 80 = 0$
21. $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$
22. $10x^{-4} - 7x^{-2} + 1 = 0$
23. $21x^{-4} - 10x^{-2} + 1 = 0$
24. $1 - 9x^{-2} + 18x^{-4} = 0$
25. $x^4 + 23x^2 = 50$
26. $x^4 = 2x^2 + 3$
27. $4x^4 - 2 = 7x^2$
28. $9x^4 - (26x^2 + 3) = 0$
29. $(x^2 - 2)^2 - x^2 = 504$

73. Equações irracionais. *Uma equação é chamada irracional, quando a incógnita está situada debaixo de um radical.* Por exemplo, as equações

$$3 + \sqrt{x} = 6 \qquad 7 - \sqrt{x-1} = 4 \qquad \sqrt{x} + 5 = 2\sqrt{x}$$

são equações irracionais.

Antes de aprender a resolver estas equações, é conveniente recordar que:

Multiplicando ambos os membros de uma equação, por uma expressão que contenha **x**, *a equação resultante não é, em geral, eqüivalente à primeira, isto é, pode admitir raízes que não convêm à primeira.* (E.M.T.V. § 69, II)

74. Resolução das equações irracionais. A diversidade de formas das equações irracionais não permite estabelecer uma regra geral para a sua resolução. O processo varia, de acôrdo com a equação dada. E' preferível examinar alguns tipos mais simples desta espécie de equações, e estabelecer a regra para cada um dêles.

I. Resolver a equação $\sqrt{x+1} = 5$.

Elevando ambos os membros desta equação, ao quadrado, teremos:

$$x + 1 = 25 \quad .\dot{}. \quad x = 24$$

Verificação. $\sqrt{24+1} = 5 \quad .\dot{}. \quad 5 = 5$

Resposta. A raiz da equação dada é 24.

Observação. *Resolvida uma equação irracional, a verificação da raiz obtida é, em geral, indispensável.* Com efeito, consideremos a equação

$$-\sqrt{x+1} = 5$$

Elevando ao quadrado, $x + 1 = 25 \quad .\dot{}. \quad x = 24$

Verificando, $-\sqrt{24+1} = 5 \quad .\dot{}. \quad -5 = 5$, o que é um absurdo.

Em resumo, dadas as equações

$$+\sqrt{x+1} = 5 \qquad (1)$$

$$-\sqrt{x+1} = 5 \qquad (2)$$

e elevando-as ao quadrado, resulta:

$$x + 1 = 25 \qquad (3)$$

A equação (3) não é eqüivalente à equação (1) ou à equação (2) porque, quer no caso da equação (1) ou da equação (2) o primeiro membro foi multiplicado por $\sqrt{x+1}$, isto é, por uma quantidade que contém x (§ 73); pode conter raízes estranhas a estas equações; daí a necessidade de verificar se as raízes da equação (3) convêm à equação (1) ou à equação (2). No caso presente, 24, que é a raiz da equação (3), convém à equação (1) mas não convém à equação (2) que, aliás, não tem solução; é uma equação impossível. E assim verificamos que há equações *irracionais* que não têm raizes.

II. Resolver a equação $\sqrt{x+9} = 11 - x$.

Elevando ao quadrado . . . . $x+9 = 121 - 22x + x^2$

Ordenando . . . . $x^2 - 23x + 112 = 0$

Resolvendo. . . . . $x' = 16$ e $x'' = 7$

Verificação. $\sqrt{16+9} = 11 - 16 \quad .\dot{}. \quad 5 = -5$ (?)

$\sqrt{7+9} = 11 - 7 \quad .\dot{}. \quad 4 = 4$

Resposta. A raiz da equação dada é 7.

Observação. Consideremos as equações seguintes:

$$+\sqrt{x+9} = 11 - x \qquad (1)$$

$$-\sqrt{x+9} = 11 - x \qquad (2)$$

Elevando-as ao quadrado, teremos:

$$x + 9 = 121 - 22x + x^2 \quad .\dot{}.$$

$$x^2 - 23x + 112 = 0 \qquad (3)$$

$$x' = 16 \quad \text{e} \quad x'' = 7$$

A primeira raiz, $x' = 16$, convém à equação (2) ao passo que a segunda raiz, $x'' = 7$, convém à equação (1). A equação (3) resulta da elevação ao quadrado, da equação (1) ou (2); portanto pode conter *raízes estranhas* a uma ou outra destas equações. Se a equação dada é (1) a raiz estranha é 16; se a equação dada é (2) a raiz estranha é 7. Em resumo:

$$\left\{\begin{array}{l} +\sqrt{x+9} = 11 - x \ (1) \\ -\sqrt{x+9} = 11 - x \ (2) \end{array}\right\} \quad .\dot{}. \quad x^2 - 23x + 112 = 0 \quad .\dot{}. \quad \left\{\begin{array}{l} x' = 16 \\ x'' = 7 \end{array}\right\}$$

A raiz da equação (1) é 7.

A raiz da equação (2) é 16.

III. Resolver a equação $\sqrt{3x-2} + 5 = \sqrt{x+35}$

Elevando ao quadrado. . . $3x - 2 + 10\sqrt{3x-2} + 25 = x + 35$

Reduzindo . . . . $3x + 23 + 10\sqrt{3x-2} = x + 35$

Transpondo e reduzindo. $10\sqrt{3x-2} = -2x + 12$

Dividindo por 2 .... $5\sqrt{3x-2} = 6 - x$

Elevando ao quadrado .. $25(3x-2) = 36 - 12x + x^2$

Eliminando os parênteses. $75x - 50 = 36 - 12x + x^2$

Reduzindo e ordenando . $x^2 - 87x + 86 = 0$

Resolvendo .... $x' = 86$ e $x'' = 1$

Verificação. $\sqrt{3 \times 86 - 2} + 5 = \sqrt{86 + 35}$ ∴

$\sqrt{256} + 5 = \sqrt{121}$ ∴ $16 + 5 = 11$ (?)

$\sqrt{3 \times 1 - 2} + 5 = \sqrt{1 + 35}$ ∴ $1 + 5 = 6$

Resposta. A raiz da equação dada é 1.

Observação. A raiz 86 convém à equação $-\sqrt{3x-2} + 5 = -\sqrt{x+35}$, como é fácil verificar.

IV. Resolver a equação $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1} = \sqrt{3x+3}$.

Elevando ao quadrado...

$$x + 2 + 2\sqrt{(x+2)(x-1)} + x - 1 = 3x + 3$$

Reduzindo .... $2x+1+2\sqrt{x^2+x-2} = 3x+3$

Transpondo e reduzindo. $2\sqrt{x^2+x-2} = x+2$

Elevando ao quadrado .. $4(x^2+x-2) = x^2+4x+4$

$4x^2+4x-8 = x^2+4x+4$

Ordenando .... $3x^2-12 = 0$

$x^2-4 = 0$

$x' = +2$ e $x'' = -2$

Verificação.

$\sqrt{2+2}+\sqrt{2-1} = \sqrt{6+3}$ ∴ $\sqrt{4}+\sqrt{1} = \sqrt{9}$ ∴ $3 = 3$

$\sqrt{-2+2}+\sqrt{-2-1} = \sqrt{3(-2)+3}$ ∴ $\sqrt{0}+\sqrt{-3} = \sqrt{-3}$

Resposta. A equação dada admite duas raízes: $+2$ e -2.

De acôrdo com os exercícios anteriores, a resolução da equação irracional fica subordinada, na maioria dos casos, à seguinte

Regra. *Se a equação tem um radical, isola-se o mesmo, no primeiro ou segundo membro da equação, e elevam-se ambos os membros desta, ao quadrado. Resolve-se a equação resultante e verifica-se se as raízes obtidas convêm à equação dada. Se a equação tem*

dois radicais, isola-se um dêles e elevam-se ambos os membros da equação, ao quadrado; depois, na equação resultante, isola-se o radical que ela contém, e elevam-se ambos os membros desta segunda equação ao quadrado. Eliminados os radicais, resolve-se a equação resultante, e verifica-se cuidadosamente quais as raízes desta última equação, que convêm à equação dada.

Exercícios. Série XL

Resolver as equações irracionais seguintes:

1. $3x - 2\sqrt{x} = 65$
2. $4\sqrt{x} + \sqrt{4x} = 18$
3. $\dfrac{\sqrt{x}}{5} - \dfrac{2\sqrt{4x}}{3} + \dfrac{34}{3} = 0$
4. $\sqrt{x+11} - x + 1 = 0$
5. $\sqrt{3x+28} + 2x = 21$
6. $\sqrt{2x-1} + 7 = 2x$
7. $\sqrt{x^2-20} = 10 - x$
8. $\sqrt{41-x^2} = 9 - x$
9. $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x} = 3$
10. $\sqrt{x^2-9} = 9 - x$
11. $\sqrt{x+15} = 15 - \sqrt{x}$
12. $\sqrt{x^2-7} = 7 - x$
13. $\sqrt{x-1} - \sqrt{x-4} = 1$
14. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+10} = 9$
15. $\sqrt{3x+7} - \sqrt{2x+10} = 0$
16. $\sqrt{2x+5} - \sqrt{2x+2} = 1$
17. $\sqrt{2x+5} + \sqrt{2x-3} = 4$
18. $\sqrt{x+1} = \sqrt{3x-5}$
19. $\sqrt{3x+5} + \sqrt{3x-5} = 4$
20. $\sqrt{x+32} = 16 - \sqrt{x}$
21. $x + 2 = \sqrt{x^2+6}$
22. $\sqrt{x+12} = \sqrt{x} + 2$
23. $\sqrt{x-7} - \sqrt{x+1} + 2 = 0$
24. $\sqrt{3x-5} = 1 + \sqrt{2x-5}$
25. $\sqrt{12+x} + \sqrt{2x+1} = \sqrt{7x+21}$
26. $\sqrt{2x-3} = \dfrac{9}{\sqrt{2x-3}}$
27. $\sqrt{3+x} = \dfrac{6}{\sqrt{3+x}}$
28. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{4\sqrt{x}} = \dfrac{27}{8}$
29. $\dfrac{2+\sqrt{1-x}}{2-\sqrt{1-x}} = \dfrac{5}{3}$
30. $\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} = \dfrac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}-2}$
31. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{9-x} = 3$ (*).

(*) Esta equação foi dada na competição intelectual entre ginasianos, realizada em São Paulo, em dezembro de 1941. Para resolvê-la, convém fazer $x = y^3$.

75. Problemas do segundo grau com uma incógnita. Já vimos (§ 29) em que consiste a resolução algébrica de um problema. A maior dificuldade consiste em *por o problema em equação.* Não existem regras gerais para estabelecer a *equação do problema,* isto é, *a tradução em linguagem algébrica do enunciado do mesmo problema.* Em muitos casos podemos recorrer à conhecida regra de Newton. Em outros, porém, tudo depende da habilidade do estudante.

Dado um problema, a equação resultante pode ser do primeiro grau; neste caso diremos que *o problema dado é do primeiro grau.* Pode acontecer, porém, que a equação resultante seja do segundo grau; então o problema será do segundo grau. Portanto,

O problema do segundo grau é aquele cuja tradução em linguagem algébrica dá origem a uma equação do segundo grau.

A equação do segundo grau tem sempre duas raízes; mas, o problema do segundo grau pode ter duas soluções, uma ou nenhuma. As duas raízes da equação do segundo grau podem ser:

a) *reais ou imaginárias;*
b) *inteiras ou fracionárias;*
c) *positivas ou negativas;*
d) *racionais ou irracionais.*

Ora, nem todo o problema pode admitir como solução um número imaginário ou fracionário ou negativo ou irracional.

Por exemplo, se a solução do problema é a idade de um indivíduo, esta não pode ser um número negativo ou imaginário. Se é o número de lados de um polígono, êste número não pode ser fracionário. Se é a profundidade de um poço (§ 76) e achamos para a mesma dois valores positivos e diferentes, estamos diante de um absurdo! O poço não pode ter duas profundidades diferentes, é claro!

Daí a necessidade de *interpretar certas raízes singulares, discutí-las, estudar-lhes a razão de ser,* etc.. E' neste capítulo interessante da Matemática que consiste a discussão dos problemas do segundo grau. Neste parágrafo vamos apresentar alguns problemas

resolvidos mediante uma equação do segundo grau com uma incógnita.

I. *A diferença entre o quadrado de um número e o décuplo do mesmo número é* 231. *Determinar êste número.*

Representando-o por x, teremos:

$$x^2 - 10x - 231 = 0$$
$$x = 5 \pm \sqrt{25 + 231}$$
$$x = 5 \pm 16$$
$$x' = 21$$
$$x'' = -11$$

Resposta. O problema admite duas soluções; 21 e -11. Com efeito,

$$21^2 - 10 \times 21 = 231$$
$$(-11)^2 - 10(-11) = 231$$

II. *A diferença entre o quadrado da idade de Carlos e o décuplo da mesma idade é* 231. *Determinar a idade de Carlos.*

Representando-a por x, teremos:

$$x^2 - 10x - 231 = 0$$
$$x' = 21$$
$$x'' = -11$$

Resposta. Carlos tem 21 anos. A raiz negativa da equação é rejeitada porque a idade de Carlos não pode ser negativa.

III. *Determinar dois números cuja diferença é* 8 *e cujo produto é* 240.

Seja x o menor, o maior será $x + 8$. Portanto,

$$x(x + 8) = 240$$
$$x^2 + 8x - 240 = 0$$
$$x = -4 \pm \sqrt{16 + 240}$$
$$x = -4 \pm 16$$
$$x' = 12$$
$$x'' = -20$$

Resposta. Sendo 12 o número menor, o maior será $12 + 8$, isto é, 20. Sendo -20 o menor, o maior será $-20 + 8$, isto é, -12. Portanto, o problema admite duas soluções: 12 e 20 ou -20 e -12. Com efeito, $20 - 12 = 8$ e $20 \times 12 = 240$; $-12 - (-20) = 8$ e $(-12)(-20) = 240$.

IV. *Determinar as idades de Carlos e Raul, sabendo que sua diferença é* 8 *e seu produto,* 240.

Seja x a idade de Raul; a de Carlos será $x + 8$. Portanto,

$$x(x + 8) = 240$$
$$x' = 12$$
$$x'' = -20$$

Resposta. A raiz aceitável é 12; Raul tem 12 anos, e Carlos, 20. A raiz negativa é rejeitada.

V. *Determinar dois números cuja soma é 20 e cujo produto é 91. Generalizar. Mostrar quais as condições para que o problema seja possível.*

Observação. Em geral, os dois números pedidos são diferentes.

Seja x o número maior; o menor será $20-x$. Logo,

$$x(20-x) = 91$$
$$20x - x^2 - 91 = 0$$
$$x^2 - 20x + 91 = 0$$
$$x' = 13 \qquad x'' = 7$$

Consideremos a primeira raiz, isto é, $x' = 13$. Sendo 13 o número maior, o menor é 20–13, isto é, 7. Com efeito, $13 + 7 = 20$ e $13 \times 7 = 91$. A segunda raiz deve ser rejeitada porque se o número maior fosse 7, o menor seria $20 - 7$, isto é, 13, o que é um absurdo.

Resposta. O número maior é 13 e o menor, 7.

Seja x o número menor; o maior será $20-x$. Logo,

$$x(20-x) = 91$$
$$20x - x^2 - 91 = 0$$
$$x^2 - 20x + 91 = 0$$
$$x' = 13 \qquad x'' = 7$$

Consideremos a primeira raiz, isto é, $x' = 13$. Sendo 13 o número menor, o maior é 20–13, isto é, 7, o que é um absurdo. Portanto, a primeira raiz deve ser rejeitada. Consideremos a segunda raiz, isto é, $x'' = 7$. Sendo 7 o número menor, o maior é 20–7, isto é, 13. Com efeito, $7 + 13 = 20$ e $7 \times 13 = 91$.

Resposta. O número menor é 7 e o maior, 13.

Observemos que, quer num caso, quer no outro, a equação tem as duas raízes positivas. Ora, isto não significa que o problema tenha duas soluções diferentes. Se a equação do problema é a mesma, quer x represente o número maior, quer represente o número menor, não é natural que a equação nos dê sòmente um dêstes números; o que é natural e lógico é que ela nos dê os dois números ao mesmo tempo. E, assim, as duas raízes da equação constituem a única solução do problema.

Portanto, resolvendo problemas desta espécie, não é necessário dizer: *seja* x *o número maior (ou o menor).* E' bastante dizer: *seja* x *um dos números pedidos; o outro será* $20 - x$, etc..

Generalização. Seja s a soma e p, o produto. Representando um dos números (o maior ou o menor) por x, o outro será $s-x$. Logo,

$$x(s-x) = p$$
$$sx - x^2 - p = 0$$
$$x^2 - sx + p = 0$$
$$x = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - p}$$

O problema terá solução se as duas raízes forem reais, o que exige que tenhamos $\frac{s^2}{4} \geqq p$. Se tivermos $\frac{s^2}{4} < p$, as duas raízes serão imaginárias (§ 56) e o problema não terá solução. Portanto, para que o problema seja possível, é necessário que a quarta parte do quadrado da soma, s, seja maior que o produto, p, ou, no mínimo, igual a êste produto. Por exemplo, não existem dois números cuja soma seja 20 e cujo produto seja 120, porque $\frac{400}{4} < 120$.

Quando tivermos $\frac{s^2}{4} > p$, os dois números pedidos serão diferentes; com efeito,

$$x' = \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} - p} \qquad x'' = \frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} - p}$$

Quando tivermos $\frac{s^2}{4} = p$ os dois números pedidos serão iguais; com efeito,

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \frac{s}{2} + 0 \\ x'' &= \frac{s}{2} - 0 \end{aligned}\right\} \therefore \; x' = x'' = \frac{s}{2}$$

Ora, se para o valor máximo de p, as duas raízes são iguais, conclue-se que, para dividir um número em duas partes cujo produto seja máximo, é bastante dividir êste número em duas partes iguais.

VI. *Quantos lados tem um polígono com 275 diagonais? Generalizar.*

Representando por n o número de lados e por d, o de diagonais, já sabemos que:

$$d = \frac{n(n-3)}{2} \qquad \text{(E.M.T.V. § 131)}$$

Substituindo d por 275, teremos:

$$275 = \frac{n(n-3)}{2}$$
$$550 = n^2 - 3n$$
$$n^2 - 3n - 550 = 0$$
$$n = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 550}$$

$$n = \frac{3}{2} \pm \frac{47}{2}$$
$$n' = 25 \qquad n'' = -22$$

A raiz negativa deve ser recusada porque o número de lados de um polígono não pode ser negativo. Portanto, o polígono tem 25 lados.

Generalização. Quantos lados tem um polígono cujo número de diagonais é d?

Tomando a fórmula $d = \frac{n(n-3)}{2}$, e dela deduzindo o valor de n, em função de d, teremos:

$$2d = n^2 - 3n$$
$$n^2 - 3n - 2d = 0$$
$$n = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 8d}}{2}$$

Esta fórmula nos dá o número de lados de um polígono, em função do número de diagonais. Mas ela pode desdobrar-se em duas, a saber:

$$n' = \frac{3 + \sqrt{9 + 8d}}{2} \quad (1) \qquad n'' = \frac{3 - \sqrt{9 + 8d}}{2} \quad (2)$$

Ora, n' é sempre positivo, ao passo que n'' é sempre negativo porque, evidentemente, $\sqrt{9 + 8d} > 3$. E, considerando que o número de diagonais de um polígono não pode ser negativo, segue-se que a fórmula que resolve o problema é a fórmula (1).

Entretanto, esta fórmula contém um radical do segundo grau e, se o binômio $9 + 8d$ não for um quadrado perfeito, o valor de n será irracional e, conseqüentemente, o número de lados será também irracional, o que é um absurdo, porque o número de lados de um polígono não pode ser um número irracional; deve ser um número positivo e racional. Logo, para que o problema tenha solução, o número dado de diagonais não pode ser qualquer; *é necessário* que o binômio $9 + 8d$ seja quadrado perfeito.

Satisfeita esta condição, seja d um número par ou ímpar; $8d$ será sempre um número par, e $9 + 8d$ um número ímpar; logo, $\sqrt{9 + 8d}$ será um número ímpar, e $3 + \sqrt{9 + 8d}$ um número par, isto é, sempre divisível por 2.

Em resumo, para que o problema proposto tenha solução, é necessário e suficiente que o binômio $9 + 8d$ seja um quadrado perfeito.

VII. *Determinar dois números cuja soma é 12, e cuja soma dos quadrados é 74. Generalizar. Mostrar em que condições o problema é possível.*

Seja x o número maior; o menor será $12 - x$. Logo,

$$x^2 + (12 - x)^2 = 74$$
$$x^2 + 144 - 24x + x^2 - 74 = 0$$
$$2x^2 - 24x + 70 = 0$$
$$x^2 - 12x + 35 = 0$$
$$x' = 7 \qquad x'' = 5$$

Seja x o número menor; o maior será $12 - x$. Logo,

$$x^2 + (12 - x)^2 = 74$$
$$x^2 + 144 - 24x + x^2 - 74 = 0$$
$$2x^2 - 24x + 70 = 0$$
$$x^2 - 12x + 35 = 0$$
$$x' = 7 \qquad x'' = 5$$

Raciocinando como fizemos em relação ao problema V, concluímos que as duas raízes constituem a única solução do problema, isto é, os dois números pedidos são 7 e 5.

Generalização. Representemos a soma dos dois números por s, e a soma dos quadrados dêstes mesmos números por S.

Observação. Para estudar as condições de possibilidade de um problema com duas incógnitas, é necessário considerar um dos dados como constante, e determinar os limites dentro dos quais o outro dado pode variar.

$$x^2 + (s - x)^2 = S$$
$$x^2 + s^2 - 2sx + x^2 - S = 0$$
$$2x^2 - 2sx + s^2 - S = 0$$
$$x = \frac{2s \pm \sqrt{4s^2 - 8(s^2 - S)}}{4}$$
$$x = \frac{2s \pm \sqrt{8S - 4s^2}}{4}$$
$$x = \frac{2s \pm \sqrt{4(2S - s^2)}}{2}$$
$$x = \frac{s \pm \sqrt{2S - s^2}}{2}$$

Para que o problema tenha solução, é necessário que as raízes da equação sejam reais, o que exige $2S \geqq s^2$. Considerando s como constante, o problema é possível quando o dôbro da soma dos quadrados é igual, *no mínimo*, ao quadrado da soma. Por exemplo, não existem dois números cuja soma seja 10, e cuja soma dos quadrados seja 40, porque $2 \times 40 < 10^2$.

O valor mínimo de $2S$ é s^2; supondo $2S = s^2$, teremos $x' = \frac{s}{2}$ e

$x'' = \frac{s}{2}$. Portanto, para dividir um número em duas parcelas cuja soma dos quadrados seja a menor possível, isto é, mínima, devemos dividí-lo em duas partes iguais.

76. O problema do poço. O espaço percorrido por um corpo que cai livremente é dado pela fórmula $e = \frac{gt^2}{2}$, na qual e representa o caminho percorrido pelo corpo, g a aceleração da gravidade, que é mais ou menos igual a 9,81 e t, o tempo em segundos, empregado pelo corpo para atingir o solo ou qualquer obstáculo que o detenha em sua queda. Por exemplo, se soltarmos uma pedra, da janela de um edifício, e se esta pedra, caindo livremente no espaço, chegar ao solo depois de 6 segundos, ficaremos sabendo que a altura da janela, em relação ao nível da rua, é $\frac{9{,}81 \times 36}{2} = 9{,}81 \times 18 = 176{,}58$m aproximadamente, não levando em conta a resistência do ar.

Aprendemos também em Física que a velocidade do som, no ar, é de 340 metros por segundo. Isto pôsto, vamos resolver o clássico problema do poço.

Um indivíduo deixa cair uma pedra dentro de um poço e mede cuidadosamente o tempo decorrido entre o momento em que largou a pedra, e o momento em que lhe chegou aos ouvidos o ruído da pedra, ao chegar ao fundo do poço. Qual a profundidade dêste?

Só temos um dado para resolver êste problema: é o tempo mencionado no mesmo e ao qual chamaremos t. Mas êste tempo t se compõe de duas parcelas, a saber: o tempo m, durante o qual a pedra chegou ao fundo do poço, e o tempo n, durante o qual o ruído da queda da pedra no fundo do poço, chegou ao ouvido do observador.

Representando por x a profundidade do poço, e lembrando que o espaço percorrido por um corpo que cai em queda livre, é dado pela fórmula $e = \frac{gt^2}{2}$, teremos:

$$x = \frac{gm^2}{2} \therefore 2x = gm^2 \therefore m^2 = \frac{2x}{g} \therefore m = \sqrt{\frac{2x}{g}} \qquad (1)$$

Representando por x a profundidade do poço, e lembrando que o espaço percorrido pelo som é dado pela fórmula $e = vt$ (sendo $v = 340$ metros), teremos:

$$x = vn \therefore n = \frac{x}{v} \qquad (2)$$

Somando as equações (1) e (2), e lembrando que $m + n = t$, teremos:

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{v} = t \therefore \sqrt{\frac{2x}{g}} = t - \frac{x}{v} \qquad (3)$$

A equação (3), cuja incógnita é x, é uma equação irracional. (§ 73) Elevando ambos os membros desta equação ao quadrado, teremos:

$$\frac{2x}{g} = t^2 - \frac{2tx}{v} + \frac{x^2}{v^2} \therefore \frac{x^2}{v^2} - \frac{2tx}{v} - \frac{2x}{g} + t^2 = 0 \therefore$$

$$\frac{x^2}{v^2} - 2x\left(\frac{t}{v} + \frac{1}{g}\right) + t^2 = 0 \qquad (4)$$

Calculando o discriminante desta equação, teremos:

$$b^2 - 4ac = 4\left(\frac{t}{v} + \frac{1}{g}\right)^2 - \frac{4t^2}{v^2} = \left(\frac{4t^2}{v^2} + \frac{8t}{vg} + \frac{4}{g^2}\right) - \frac{4t^2}{v^2}$$

Êste binômio é, evidentemente, positivo; portanto, as duas raízes da equação (4) são reais.

Dividindo ambos os membros da equação (4) por 2, e resolvendo a equação resultante, teremos:

$$\frac{x^2}{2v^2} - x\left(\frac{t}{v} + \frac{1}{g}\right) + \frac{t^2}{2} = 0 \therefore$$

$$x = \frac{\frac{t}{v} + \frac{1}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{t}{v} + \frac{1}{g}\right)^2 - \frac{t^2}{v^2}}}{\frac{1}{v^2}} \qquad (5) \quad (*)$$

Observando a equação (5) é fácil concluir que as duas raízes são positivas; o que, aliás, podíamos imediatamente deduzir da

(*) Não convém modificar a forma desta equação.

equação (4). Com efeito, nesta equação, temos $b < 0$ e $c > 0$; portanto, as duas raízes da equação (4) são positivas. (§ 68) Entretanto, o poço não pode ter duas profundidades diferentes, é claro! Qual é, pois, a raiz que deve ser recusada? E' a primeira, é x', porque, com evidência,

$$x' > \frac{\frac{t}{v}}{\frac{1}{v^2}} \quad \therefore \quad x' > \frac{t}{v} \times \frac{v^2}{1} \quad \therefore \quad x' > vt$$

Ora, sendo $x' > vt$ e $x = vn$, (2), teremos $vn > vt \therefore n > t$, o que é absurdo, porque, sendo $t = m + n$, forçosamente, $n < t$.

Portanto, a raiz que convém ao problema é x'', e a profundidade do poço é dada pela fórmula

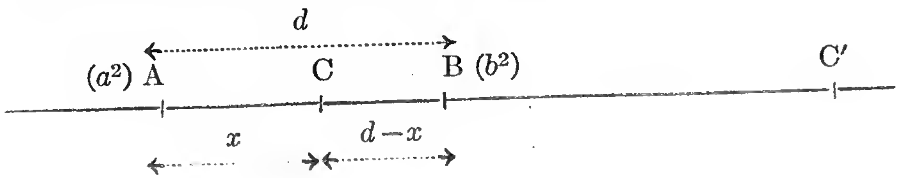
$$x'' = x = \frac{\frac{t}{v} + \frac{1}{g} - \sqrt{\left(\frac{t}{v} + \frac{1}{g}\right)^2 - \frac{t^2}{v^2}}}{\frac{1}{v^2}}$$

Resta-nos explicar a origem da raiz x' que, como já vimos, deve ser rejeitada. A equação (3) foi elevada ao quadrado. Portanto, introduzimos nesta equação uma raiz estranha (§ 73) que convém à equação

$$-\sqrt{\frac{2x}{g}} = t - \frac{x}{v}$$

77. O problema das luzes. *Dois focos luminosos de intensidades diferentes estão situados em dois pontos A e B. Determinar na reta que passa por êstes focos, um ponto igualmente iluminado por ambos.*

Seja d a distância AB; a^2 e b^2 as intensidades dos dois focos situados respectivamente nos pontos A e B.



A intensidade de um foco luminoso é a quantidade de luz que êle envia a um ponto situado a uma unidade de distância. Aprendemos em Física, que a intensidade de um foco luminoso varia na razão inversa do quadrado da distância do foco a êste ponto. Suponhamos, para fixar idéias, que a intensidade de um foco luminoso é de 800 velas; para um ponto situado a um metro de distância, a intensidade dêste foco é de 800 velas; para um ponto situado a 2 metros, a intensidade é $800 \div 2^2$, isto é, 200 velas; para um ponto situado a 4 metros, a intensidade é $800 \div 4^2$, isto é, 50 velas, etc..

Isto pôsto, suponhamos o problema resolvido, e seja C o ponto igualmente iluminado pelos dois focos; façamos $AC = x$ e $BC = d - x$. Em virtude do citado princípio de Física, teremos:

$$\frac{a^2}{x^2} = \frac{b^2}{(d-x)^2} \quad \therefore \quad \frac{a}{x} = \pm\frac{b}{d-x} \quad \therefore \quad \frac{a}{x} = \frac{\pm b}{d-x} \quad \therefore$$

$$ad - ax = \pm bx \quad \therefore \quad ax \pm bx = ad \quad \therefore \quad x(a \pm b) = ad \quad \therefore$$

$$x = \frac{ad}{a \pm b} \quad \therefore \quad x' = d \times \frac{a}{a+b} \qquad x'' = d \times \frac{a}{a-d}$$

Vamos agora discutir êstes dois valores de x.

1.ª *hipótese.* $a^2 > b^2$. Portanto, $a > b$.

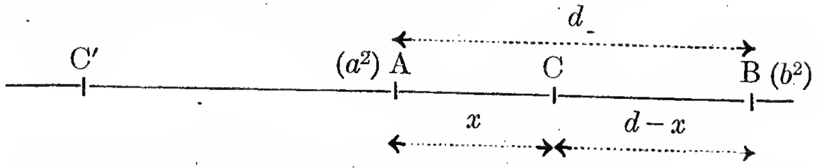
Sendo $a > b$, as duas raízes são positivas. Consideremos a primeira. Sendo $a > b$, a fração $\frac{a}{a+b}$ é maior que $\frac{1}{2}$, porém menor que 1. Logo, $d \times \frac{a}{a+b}$ é maior que $\frac{d}{2}$, porém menor que d; isto é, a primeira raiz, x', determina um ponto C, mais próximo de B do que de A.

Consideremos a segunda raiz. A fração $\frac{a}{a-b}$ é positiva, e maior que 1. Logo, $d \times \frac{a}{a-b}$ é maior que d, isto é, a segunda raiz, x'', determina um ponto C', situado á direita do ponto B.

2.ª *hipótese.* $a^2 < b^2$. Portanto, $a < b$.

Sendo $a < b$, a primeira raiz é positiva. A fração $\frac{a}{a+b}$ é, neste caso, diferente de zero e menor que $\frac{1}{2}$. Logo, ...

$d \times \dfrac{a}{a+b}$ é maior que zero, porém menor que $\dfrac{d}{2}$, isto é, a primeira raiz determina um ponto C, situado entre A e B, e mais próximo do ponto A que do ponto B.



Consideremos a segunda raiz. A fração $\dfrac{a}{a-b}$, sendo $a < b$, é negativa e maior que 1, em valor absoluto. Logo, $d \times \dfrac{a}{a-b}$ é um número negativo, isto é, a segunda raiz determina um ponto C′, situado à esquerda do ponto A. (§§31 e 80)

3.ª *hipótese.* $a^2 = b^2$. Portanto $a = b$.

Sendo $a = b$, teremos, para as duas raízes:

$$x' = d \times \frac{a}{a+b} \therefore x' = d \times \frac{a}{2a} \therefore x' = \frac{d}{2}$$

$$x'' = d \times \frac{a}{a-b} \therefore x'' = d \times \frac{a}{0} \therefore x'' = \infty$$

Sendo $x' = \dfrac{d}{2}$, esta raiz determina um ponto C, situado entre A e B, e à igual distância dos pontos A e B, o que é evidente porque os dois focos, situados respectivamente nos pontos A e B, têm a mesma intensidade.

Em relação à segunda raiz, lembremos que o símbolo ∞ representa a impossibilidade absoluta de se resolver o problema. (§33) Portanto, não existe um segundo ponto, situado à direita de B ou à esquerda de A, igualmente iluminado pelos dois focos. O que é evidente, se lembrarmos que os dois focos têm a mesma intensidade. Entretanto, o segundo valor de x, isto é, $x'' = \infty$, pode ser interpretado como indicando a existência de um ponto situado a uma distância infinitamente grande dos pontos A e B. Realmente, para êste ponto, a distância que separa os dois focos é nula: *os elementos finitos são nulos em relação ao infinito.*

Nestas condições, os dois focos, tendo a mesma intensidade, iluminarão (teòricamente) com a mesma quantidade de luz, um ponto da reta AB, cuja distância ao ponto A ou ao ponto B seja infinita.

4.ª *hipótese.* $a = b$ e $d = 0$. Neste caso, teremos:

$$x' = 0 \quad \text{e} \quad x'' = \frac{0}{0}$$

Se a distância entre os dois focos é nula, e êstes têm a mesma intensidade, é evidente que o ponto C, situado entre os dois focos e, portanto, a uma distância igual a zero, de ambos, é um ponto igualmente iluminado. Esta é a interpretação de x'. Quanto ao valor de x'', é fácil interpretá-lo; se os dois focos têm a mesma intensidade e estão reünidos em um mesmo ponto da reta AB, qualquer outro ponto da mesma reta recebe, evidentemente, de ambos, a mesma quantidade de luz; eis por que o valor de x'' é indeterminado.

Observação. Um dos problemas mais importantes do segundo grau é o da divisão de um segmento retilíneo em média e extrema razão, também chamado *divisão áurea de um segmento retilíneo;* êste problema será resolvido oportunamente. (§100)

Exercícios. Série XLI

Resolver os problemas que se seguem, com uma incógnita; interpretar as raízes negativas.

1. A soma dos quadrados de dois números consecutivos é 61. Determinar êstes números.

2. A soma dos quadrados de três números consecutivos é 50. Determinar êstes números.

3. Determinar dois números ímpares consecutivos cuja soma dos quadrados seja 202.

4. Determinar três números pares consecutivos cuja soma dos quadrados seja 116.

5. Qual é o número que, somado com a sua raiz quadrada, dá 240?

N. B. Represente-se o número por x^2.

6. Do triplo do quadrado de um número, subtraindo o quíntuplo dêste mesmo número, resta 50. Qual é o número?

7. Decompor 40 em dois fatores cuja soma seja 13.

8. Decompor 42 em duas parcelas cujo produto seja 432.

9. A soma dos quadrados de 4 números consecutivos é 294. Determinar os 4 números.

10. A diferença entre o dôbro do produto de dois números consecutivos e o quíntuplo da soma dos mesmos é 115. Determinar os dois números.

11. Determinar dois números cuja diferença é 4 e cujo produto é 165.
12. Determinar dois números cuja diferença é 5 e cujo produto é 300.
13. Quais são os dois números cuja soma é 24 e cujo produto é 143?
14. Comprei algumas peras por Cr.$21,00. Se tivesse comprado mais 5, com o mesmo dinheiro, cada pêra custaria Cr.$0,35 menos. Quantas peras comprei?

Solução. Seja x o número de peras; cada uma me custou $\frac{21}{x}$. Se eu tivesse comprado $x + 5$, cada uma me custaria $\frac{21}{x+5}$. E a diferença de preços sendo Cr.$0,35 teremos:

$$\frac{21}{x} - \frac{21}{x+5} = 0{,}35$$

15. Comprei alguns metros de sêda por Cr.$231,00. Se tivesse comprado mais 4m com o mesmo dinheiro, cada metro custaria Cr.$5,60 menos. Quantos metros comprei?
16. Comprei alguns metros de sêda por Cr.$480,00. Entretanto, se o negociante abatesse Cr.$3,00 em cada metro, eu poderia comprar 8m mais com a mesma quantia. Quantos metros comprei?
17. A diferença de dois números é 3; a diferença entre a razão direta e a razão inversa dêstes mesmos números é $^{21}/_{10}$. Determiná-los.
18. A soma de dois números é 5; a soma de suas razões direta e inversa é $^{13}/_{6}$. Determiná-los.
19. A soma de dois números é 13. Somando o maior dos dois números, com o produto dos mesmos, resulta 48. Quais são os dois números?
20. Multiplicando três números consecutivos e dividindo o produto sucessivamente, por cada um dos três fatores, a soma dos quocientes é 74. Quais são os três números?
21. As idades de três irmãos são três números ímpares consecutivos. Se dividirmos o produto delas, sucessivamente, por cada uma delas, a soma dos quocientes será 143. Quais são as três idades?
22. Quero distribuir Cr.$60,00 igualmente entre um certo número de pobres. Mas, se aparecerem na hora da distribuição mais 4 pobres, a parte de cada um ficará diminuída de Cr.$1,25. Quantos são os pobres?

Observação. Interpretar a solução negativa; formular um problema de modo que a sua solução seja a raiz negativa.

23. Comprei um certo número de sacas de café por Cr.$7 200,00. Se cada saca custasse Cr.$30,00 menos, eu poderia comprar 12 sacas mais. Quantas sacas comprei; e qual o preço de cada uma?
24. Quais os dois números consecutivos cuja soma dos recíprocos é $^{15}/_{56}$?
25. Quais são os dois números cuja soma é 11, e cuja soma dos recíprocos é $^{11}/_{18}$?
26. Antônio faz um trabalho em 4 dias menos que Raul; trabalhando juntos fazem o serviço em $2^{4}/_{5}$ dias. Em quantos dias, cada um dêles, trabalhando só, fará o mesmo serviço?
27. Duas torneiras, abertas ao mesmo tempo, enchem um tanque em 2 horas e 55 minutos. Em quanto tempo cada uma delas, correndo só, encherá o mesmo tanque, se uma delas o enche em 2 horas mais do que a outra?

28. Dois operários fazem um certo serviço em 6 dias. Um dêles, trabalhando só, faz o mesmo serviço em 5 dias mais do que o outro, se êste também trabalhar só. Em quantos dias, cada um dêstes operários, trabalhando só, faria o mesmo serviço?
29. Um grupo de estudantes cariocas decidiu visitar os seus colegas paulistas. A despesa foi orçada em Cr.$1 600,00. Mas, tendo 4 estudantes desistido, à última hora, a parte de cada um dos que fizeram a viagem ficou acrescida de Cr.$20,00. Quantos estudantes tomaram parte na excursão?
30. Um grupo de estudantes paulistas decidiu visitar os seus colegas cariocas. A despesa foi orçada em Cr.$2 520,00. À última hora, mais 6 estudantes aderiram à excursão, de modo que a despesa para cada um dos rapazes ficou diminuida de Cr.$14,00. Quantos estudantes tomaram parte na excursão?
31. Vendendo um relógio por Cr.$131,25, ganhei tantos por cento, quantos *cruzeiros* êle me custou. Quanto paguei pelo relógio?
32. Vendendo um anel por Cr.$596,40, ganhei tantos por cento, quantas *notas de dez cruzeiros* êle me custou. Quanto paguei pelo anel?
33. Em que sistema de numeração o número 234, escrito na base decimal, se escreve 453?

Observação. Representando a base do sistema por x, teremos:

$$4 \times x^2 + 5 \times x + 3 = 234$$

34. Em que sistema de numeração o número 314, escrito na base decimal, se escreve 472?
35. Em que sistema de numeração o número 77, escrito na base decimal, se escreve 302?
36. Um número tem 2 algarismos; o das dezenas é o quadrado do das unidades. Determinar êste número, sabendo que, se lhe subtrairmos 18, resulta o mesmo número invertido.
37. Um número é constituído por dois algarismos cuja soma é 8. Multiplicando os dois algarismos e somando 38 ao produto, resulta o mesmo número, invertido. Determinar êste número.
38. Um ciclista, caminhando com movimento uniforme, percorreu 60km, durante um certo número de horas. Entretanto, se êle corresse mais 2km por hora, faria a sua excursão em uma hora menos. Qual foi a sua velocidade?
39. Uma avenida tem 2 100m de comprimento. Um estudante percorreu-a a pé e verificou que, se tivesse andado mais 6m por minuto, teria chegado 4 minutos e 30 segundos mais cedo, ao fim da avenida. Qual foi a sua velocidade?
40. Um alfaiate tem duas peças de casimira inglesa, cada uma das quais custa Cr.$1 320,00. Uma peça tem 2 metros mais que a outra, porém, o metro desta custa Cr.$6,00 mais que o metro daquela. Qual é o comprimento de cada uma das peças?
41. Se aumentarmos 3m em cada um dos lados de um quadrado, a área dêste tornar-se-á igual a $121m^2$. Quanto mede o lado do quadrado?
42. Se aumentarmos 2m a um dos lados de um quadrado, e 3m ao lado consecutivo, a área do retângulo resultante será de $56m^2$. Quanto mede o lado do quadrado?

43. Calcular as dimensões de um retângulo cuja área é de $120m^2$ e cujo perímetro mede 46m.

44. A diferença entre as dimensões de um retângulo é de 3m; a área do mesmo é de $108m^2$. Calcular as duas dimensões.

45. Dois ciclistas partiram ao mesmo tempo de uma cidade para visitar uma outra situada a 120km da primeira. O primeiro, correndo com uma velocidade de 2km por hora, mais que o segundo, chegou 2 horas mais cedo. Qual foi a velocidade de cada um?

46. Vendí um objeto por Cr.\$21,00, perdendo neste negócio tantos por cento, quantos *cruzeiros* êste objeto me custou. Calcular o custo.

47. Um negociante comprou alguns chapéus por Cr.\$720,00 e vendeu-os a Cr.\$65,00 cada um, ganhando, na venda de todos os chapéus, o preço de custo de um dêles. Quanto lhe custou cada chapéu?

48. A correnteza de um rio tem uma velocidade de 2km. Um barco desce o rio numa distância de 4,2km e depois volta ao ponto de partida, realizando a viagem em 2 horas, ida e volta. Qual é a velocidade do barco?

49. No interior de um quartel há um grande pátio quadrado destinado aos exercícios militares. Em redor do pátio existe uma calçada com 3m de largura. A área da parte não calçada está para a área total do pátio, assim como 16 está para 25. Quanto mede o lado do pátio?

78. Problemas do segundo grau com duas incógnitas; sistemas do segundo grau. Consideremos o seguinte problema:

Determinar dois números cuja soma é 28 e cuja soma dos quadrados é 400.

Representando os dois números respectivamente, por x e y, podemos escrever as seguintes equações:

$$\left\{ \begin{aligned} x + y &= 28 \\ x^2 + y^2 &= 400 \end{aligned} \right\} \qquad \text{(A)}$$

Estas duas equações são *distintas* porque cada uma delas traduz uma relação diferente, entre os dois números pedidos; são *simultâneas* porque devem ter as mesmas raízes. E ambas formam um *sistema*. (§ 7)

Um sistema de equações simultâneas é do 1.º grau, quando as equações que o compõem, são do primeiro grau; é do segundo grau, quando a equação de grau mais elevado é do segundo grau; é do terceiro grau, quando a equação de grau mais elevado é do terceiro grau; e assim por diante. O sistema (A) é do segundo grau.

Neste capítulo trataremos sòmente dos sistemas de equações simultâneas do segundo grau, com duas incógnitas.

Para resolver um sistema do segundo grau, é necessário eliminar uma das incógnitas. E o método mais simples de eliminação, quando uma das equações é do primeiro grau, em relação a uma das incógnitas, é o de eliminação por substituição.

No sistema (A), tirando o valor de y, da primeira equação, e entrando com êle na segunda, teremos:

$$\begin{aligned} y &= 28 - x \\ x^2 + (28 - x)^2 &= 400 \\ x^2 + 784 - 56x + x^2 &= 400 \\ 2x^2 - 56x + 384 &= 0 \\ x^2 - 28x + 192 &= 0 \\ x' = 16 \quad x'' &= 12 \end{aligned}$$

Da equação $x + y = 28$, deduzimos:

$$x = 16 \therefore y = 12$$
$$x = 12 \therefore y = 16$$

Portanto, os dois números pedidos são 16 e 12 ou 12 e 16. Aparentemente, o problema tem duas soluções mas, na realidade, a solução é uma só. (§ 75, V)

Suponhamos agora que a tradução do enunciado de um problema, em linguagem algébrica, deu origem ao seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{aligned} x^2 + y &= 7 \\ x + y^2 &= 11 \end{aligned} \right\} \qquad \text{(B)}$$

E' também um sistema do segundo grau. Tirando o valor de y, da primeira equação, e entrando com êste valor na segunda, teremos:

$$\begin{aligned} y &= 7 - x^2 \\ x + (7 - x^2)^2 &= 11 \\ x + 49 - 14x^2 + x^4 - 11 &= 0 \\ x^4 - 14x^2 + x + 38 &= 0 \end{aligned}$$

Chegamos assim a uma equação do quarto grau, em x. Ora, os métodos gerais para resolver equações quaisquer de grau superior ao segundo, não são estudados no curso secundário; por consequência, estamos impossibilitados de resolver a equação final a que nos conduziu o sistema B.

De um modo geral, quando se resolve um sistema de duas equações simultâneas do segundo grau, *e no qual ambas as equações são do segundo grau*, a equação final a que se chega, pela eliminação de uma das incógnitas, é do quarto grau. Se esta equação final for biquadrada, poderemos resolvê-la; (§ 72) mas, se for uma equação qualquer, nada, por enquanto, poderemos fazer.

Portanto, devemos limitar o nosso trabalho à resolução de sistemas do segundo grau no qual uma das equações é do primeiro grau.

79. Artifícios de cálculo para o segundo grau. A resolução dos sistemas do segundo grau pode ser simplificada, mediante o emprêgo de certos processos particulares aos quais, por brevidade, daremos o nome de *artifícios de cálculo para o segundo grau.*

I. Resolução do sistema $\left\{\begin{aligned} x+y&=11 \\ xy&=28\end{aligned}\right\}$

Se a soma das incógnitas é 11, e se o produto é 28, segue-se que x e y são as raízes de uma equação do segundo grau, da forma $z^2+pz+q=0$, na qual $p=-11$ e $q=28$. (§70) E' bastante, pois, resolver a equação

$$z^2-11z+28=0$$

$$z=\frac{11\pm\sqrt{121-112}}{2}$$

$$z=\frac{11\pm3}{2}$$

$$x=7 \qquad y=4$$

Resposta. A solução do sistema dado é

$$x=7$$
$$y=4$$

Observação. O método geral para resolver sistemas do segundo grau, nos dará também a outra solução, isto é, $x=4$ e $y=7$.

Aplicação. Determinar as dimensões de um retângulo cuja área é de $60m^2$, sendo a soma das dimensões igual a 17m.

Representando o comprimento por x e a largura por y, teremos:

$$x+y=17$$
$$xy=60$$
$$z^2-17z+60=0$$
$$x=12 \qquad y=5$$

Resposta. As dimensões do retângulo são 12m e 5m.

Generalização. Determinar dois números cuja soma é s, e cujo produto é p.

Representando os dois números por x e y, teremos:

$$x+y=s$$
$$xy=p$$
$$z^2-sz+p=0$$
$$z=\frac{s}{2}\pm\sqrt{\frac{s^2}{4}-p}$$

$$x=\frac{s}{2}+\sqrt{\frac{s^2}{4}-p}$$

$$y=\frac{s}{2}-\sqrt{\frac{s^2}{4}-p}$$

Para que o problema seja possível, é necessário que

$$\frac{s^2}{4}\geqq p$$

Quando se atribue a p o seu valor máximo, isto é, $\frac{s^2}{4}$, o radical se anula, e os valores de x e y são iguais, isto é, $\frac{s}{2}$. Portanto,

Para dividir um número em duas partes cujo produto seja máximo, é preciso dividí-lo em duas partes iguais. (§ 67, II)

II. Resolução do sistema $\left\{\begin{aligned} x-y&=6 \\ xy&=55\end{aligned}\right\}$

Fazendo $y=-t$, teremos sucessivamente:

$$\left\{\begin{aligned} x+t&=6 \\ -xt&=55\end{aligned}\right\} \therefore \left\{\begin{aligned} x+t&=6 \\ xt&=-55\end{aligned}\right\}$$

Portanto, x e t são dois números cuja soma é 6 e cujo produto é -55. Logo, raciocinando como no artifício I, teremos:

$$z^2-6x-55=0$$
$$z=3\pm\sqrt{9+55}$$
$$x=3\pm8$$
$$x=11$$
$$t=-5$$

$$y=-t$$
$$y=-(-5)$$
$$y=5$$

Resposta. A solução, em números positivos, do sistema dado é

$$x=11$$
$$y=5$$

Observação. Se fizermos $x=-t$, teremos, sucessivamente:

$$\left\{\begin{aligned} -t-y&=6 \\ -ty&=55\end{aligned}\right\} \therefore \left\{\begin{aligned} t+y&=-6 \\ ty&=55\end{aligned}\right\} \therefore \left\{\begin{aligned} t&=5 \\ y&=-11\end{aligned}\right\} \therefore \left\{\begin{aligned} x&=-5 \\ y&=-11\end{aligned}\right\}$$

E acharemos assim a segunda solução do sistema.

Aplicação. A diferença entre as idades de dois irmãos é 4, e o produto das mesmas é 165. Determinar as duas idades.

Representando a idade maior por x e a menor por y, teremos:

$$\left\{\begin{aligned} x-y&=4 \\ xy&=165\end{aligned}\right\} \quad \text{Fazendo } y=-t \quad \left\{\begin{aligned} x+t&=4 \\ xt&=-165\end{aligned}\right\} \therefore$$

$$z^2-4z-165=0$$
$$z=2\pm\sqrt{4+165}$$
$$z=2\pm13$$
$$x=15$$
$$t=-11$$

$$y=-t$$
$$y=-(-11)$$
$$y=11$$

Resposta. As duas idades são 15 e 11 anos.

Observação. Fazendo $x=-t$, acharemos a segunda solução do sistema, $x=-11$ e $y=-15$, que não convém ao problema.

Generalização. Calcular as dimensões de um retângulo cuja área é s, sendo a diferença das mesmas dimensões igual à d.

Representando o comprimento por x e a largura por y, teremos:

$$\begin{cases} x-y=d \\ xy=s \end{cases} \quad \text{Fazendo } y=-t \quad \begin{cases} x+t=d \\ xt=-s \end{cases} \quad \therefore$$

$$z^2-dz-s=0$$

$$z=\frac{d}{2}\pm\sqrt{\frac{d^2}{4}+s}$$

$$x=\frac{d}{2}+\sqrt{\frac{d^2}{4}+s} \qquad y=-t$$

$$t=\frac{d}{2}-\sqrt{\frac{d^2}{4}+s} \qquad y=-\frac{d}{2}+\sqrt{\frac{d^2}{4}+s}$$

Resposta. As duas dimensões do retângulo são:

$$x=\sqrt{\frac{d^2}{4}+s}+\frac{d}{2}$$

$$y=\sqrt{\frac{d^2}{4}+s}-\frac{d}{2}$$

$\therefore$ Êste problema é sempre possível, sejam quais forem os valores atribuídos a s e a d. Quando $s=0$, uma das dimensões se anula, o que é evidente. Quando $d=0$, cada uma das dimensões se reduz a $\sqrt{s}$, isto é, tornam-se iguais, o que é também evidente, porque, se a diferença entre as dimensões de um retângulo é igual a zero, êste retângulo é, na realidade, um quadrado; portanto, suas dimensões são iguais, respectivamente, à raiz quadrada da área do quadrado.

III. Resolução do sistema $\begin{cases} x+y=11 \\ xy=28 \end{cases}$ (A)

Observação. O sistema (A) não se altera, evidentemente, substituindo x por y, e y por x. Eis por que êste sistema é chamado *simétrico* em x e y.

Já resolvemos o sistema (A) pelo artifício I; vamos resolvê-lo novamente com outro artifício não menos elegante, e que dispensa o teorema já conhecido. (§ 69) Tudo consiste em tirar do sistema dado, o valor de $x-y$. Elevando a primeira equação ao quadrado, e multiplicando a segunda por 4, teremos:

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=121 \\ 4xy=112 \end{cases} \therefore\ x^2-2xy+y^2=9 \ \therefore\ x-y=\pm 3 \quad \text{(B)}$$

Combinando a primeira equação do sistema (A) com as duas equações (B) teremos:

$$\begin{cases} x+y=11 \\ x-y=3 \end{cases} \therefore \begin{cases} x=7 \\ y=4 \end{cases} \quad \Big| \quad \begin{cases} x+y=11 \\ x-y=-3 \end{cases} \therefore \begin{cases} x=4 \\ y=7 \end{cases}$$

As duas soluções do sistema (A) são simétricas, como era de prever, pois que o sistema é simétrico em x e y.

IV. Resolução do sistema $\begin{cases} x-y=6 \\ xy=55 \end{cases}$ (A)

Já o resolvemos pelo artifício II; podemos resolvê-lo com outro artifício bastante simples. Elevando a primeira equação ao quadrado, e multiplicando a segunda por 4, teremos:

$$\begin{cases} x^2-2xy+y^2=36 \\ 4xy=220 \end{cases} \therefore\ x^2+2xy+y^2=256 \ \therefore\ x+y=\pm 16 \quad \text{(B)}$$

Combinando as duas equações (B) com a primeira equação do sistema (A), teremos:

$$\begin{cases} x+y=16 \\ x-y=6 \end{cases} \therefore \begin{cases} x=11 \\ y=5 \end{cases} \quad \Big| \quad \begin{cases} x+y=-16 \\ x-y=6 \end{cases} \therefore \begin{cases} x=-5 \\ y=-11 \end{cases}$$

V. Resolução do sistema $\begin{cases} x^2+y^2=34 & (1) \\ x+y=8 & (2) \end{cases}$ (A)

O artifício para resolver êste sistema consiste em tirar do mesmo, o valor de $x-y$.

Elevando (2) ao quadrado ..... $x^2+2xy+y^2=64$ (3)
Diminuindo (1) de (3) .... $2xy=30$ (4)
Diminuindo (4) de (1) .... $x^2-2xy+y^2=4$ (5)
Extraindo a raiz quadrada de (5) .... $x-y=\pm 2$ (B)

Combinando a segunda equação do sistema (A) com as duas equações (B) teremos:

$$\begin{cases} x+y=8 \\ x-y=2 \end{cases} \therefore \begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases} \quad \Big| \quad \begin{cases} x+y=8 \\ x-y=-2 \end{cases} \therefore \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$$

As duas soluções são simétricas, visto que o sistema (A) é simétrico em x e y.

Aplicação. Determinar as dimensões de um retângulo, sabendo que a soma das mesmas é 8 e que a soma de seus quadrados é 34.

Representando uma das dimensões por x e a outra por y, teremos:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$$

E' o sistema resolvido acima. A solução do mesmo, é $x = 5$, $y = 3$ isto é, as duas dimensões medem respectivamente 5 e 3.

Generalização. Determinar dois números cuja soma é s e cuja soma dos quadrados é q.

Representando por x e y os dois números, teremos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = q & (1) \\ x + y = s & (2) \end{cases}$$

Elevando (2) ao quadrado .... $x^2 + 2xy + y^2 = s^2$ (3)
Diminuindo (1) de (3) .... $2xy = s^2 - q$ (4)
Multiplicando (4) por 2 .... $4xy = 2s^2 - 2q$ (5)
Subtraindo (5) de (3) .... $x^2 - 2xy + y^2 = 2q - s^2$ (6)
Extraindo a raiz quadrada de (6).... $x - y = \pm\sqrt{2q - s^2}$

Considerando apenas o sinal $+$, porque o sinal $-$ nos conduz à solução simétrica, teremos:

$$\begin{cases} x+y=s \\ x-y=\sqrt{2q-s^2} \end{cases} \therefore \begin{cases} 2x=s+\sqrt{2q-s^2} \\ 2y=s-\sqrt{2q-s^2} \end{cases} \therefore \begin{cases} x=\dfrac{s+\sqrt{2q-s^2}}{2} \\ y=\dfrac{s-\sqrt{2q-s^2}}{2} \end{cases},$$

Para que o problema seja possível, é necessário que os valores de x e y sejam reais, o que exige $2q \geqq s^2$ ou $q \geqq \dfrac{s^2}{2}\cdot$ Portanto, q não tem máximo, mas tem um mínimo, $\dfrac{s^2}{2}\cdot$ Logo, o problema é possível quando q, isto é, a soma dos quadrados, é maior que $\dfrac{s^2}{2}$, isto é, a metade do quadrado da soma dada s. Por exemplo, não há dois números cuja soma seja 10 e cuja soma dos quadrados seja 36, porque $36 < \dfrac{100}{2}$, isto é, $36 < 50$.

Fazendo $2q = s^2$, teremos: $\begin{cases} x = \dfrac{s}{2} \\ y = \dfrac{s}{2} \end{cases}$

Portanto, para dividir um número qualquer em duas partes cuja soma dos quadrados seja mínima, é bastante dividí-lo em duas partes iguais e ambas positivas.

VI. Resolução do sistema $\begin{cases} x^2+y^2=58 & (1) \\ x - y = 4 & (2) \end{cases}$ (A)

O artifício para resolver êste sistema, consiste em tirar do mesmo o valor de $x + y$.

Elevando (2) ao quadrado..... $x^2 - 2xy + y^2 = 16$ (3)
Subtraindo (3) de (1) .... $2xy = 42$ (4)
Somando (4) com (1) .... $x^2 + 2xy + y^2 = 100$ (5)
Extraindo a raiz quadrada de (5)........ $x + y = \pm 10$ (B)

Combinando as duas equações (B) com a segunda equação do sistema (A), teremos:

$$\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=4 \end{cases} \therefore \begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases} \quad \Big| \quad \begin{cases} x+y=-10 \\ x-y=4 \end{cases} \therefore \begin{cases} x=-3 \\ y=-7 \end{cases}$$

Aplicação. Determinar as alturas de dois postes, sabendo que a diferença das mesmas é de 4m, e que a soma de seus quadrados é de $58m^2$.

Representando uma das alturas por x e a outra por y, teremos:

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x^2+y^2 = 58 \end{cases}$$

E' o sistema resolvido acima. A solução do mesmo, em números positivos, é $x = 7$ e $y = 3$. A solução negativa não convém ao problema.

Generalização. Determinar dois números cuja diferença é d, e cuja soma dos quadrados é q.

Representando o número maior por x, e o menor por y, teremos:

$$\begin{cases} x - y = d & (1) \\ x^2+y^2 = q & (2) \end{cases}$$

Elevando (1) ao quadrado ...... $x^2 - 2xy + y^2 = d^2$ (3)
Subtraindo (3) de (2) .... $2xy = q - d^2$ (4)
Somando (4) com (2) .... $x^2 + 2xy + y^2 = 2q - d^2$ (5)
Extraindo a raiz quadrada de (5) $x + y = \pm\sqrt{2q - d^2}$

Considerando apenas o sinal $+$, teremos:

$$\begin{cases} x+y=\sqrt{2q-d^2} \\ x-y=d \end{cases} \therefore \begin{cases} 2x=\sqrt{2q-d^2}+d \\ 2y=\sqrt{2q-d^2}-d \end{cases} \therefore \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2q-d^2}+d}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{2q-d^2}-d}{2} \end{cases}$$

Consideremos os valores de x e y. O problema terá solução se êstes valores forem reais, o que é possível quando $2q \geqq d^2$, ou $q \geqq \frac{d^2}{2}$. Portanto, q não tem máximo, mas tem um mínimo que é $\frac{d^2}{2}$. Nestas condições, o problema é possível quando q, isto é, a soma dos quadrados, é maior que $\frac{d^2}{2}$, isto é, a metade do quadrado da diferença dada d. Por exemplo, não existem dois números cuja diferença seja 10 e cuja soma dos quadrados seja 36, porque $36 < \frac{100}{2}$.

Fazendo $2q = d^2$, teremos: $\left\{ \begin{aligned} x &= +\frac{d}{2} \\ y &= -\frac{d}{2} \end{aligned} \right\}$

Êstes resultados nos conduzem a uma conclusão interessante. Consideremos um número qualquer, 10. Podemos escrever êste número sob a forma de uma diferença, de uma infinidade de maneiras: $12-2$, $13-3$, $8-(-2)$, $7-(-3)$, etc.. A soma dos quadrados dos dois têrmos destas diferenças, não tem máximo; tem um mínimo, que se verifica quando os dois têrmos da diferença são simétricos, isto é, 5 e -5.

VII. Resolução do sistema $\left\{ \begin{aligned} x^2 - y^2 &= 55 \\ x + y &= 11 \end{aligned} \right\}$ $\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

E' bastante dividir (1) por (2); resultará $x - y = 5$. Portanto,

$$\left\{ \begin{aligned} x + y &= 11 \\ x - y &= 5 \end{aligned} \right\} \quad \therefore \quad \left\{ \begin{aligned} x &= 8 \\ y &= 3 \end{aligned} \right\}$$

Deixamos aos estudantes o trabalho da generalização.

VIII. Resolução do sistema $\left\{ \begin{aligned} x^2 - y^2 &= 80 \\ x - y &= 4 \end{aligned} \right\}$ $\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

E' bastante dividir (1) por (2); resultará $x + y = 20$. Portanto,

$$\left\{ \begin{aligned} x + y &= 20 \\ x - y &= 4 \end{aligned} \right\} \quad \therefore \quad \left\{ \begin{aligned} x &= 12 \\ y &= 8 \end{aligned} \right\}$$

Deixamos aos estudantes o trabalho da generalização.

XI. Resolução do sistema $\left\{ \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 34 \\ xy &= 15 \end{aligned} \right\}$ $\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$ (A)

Multiplicando a equação (2) por 2 .... $2xy = 30$ (3)
Somando (1) e (3) .... $x^2+2xy+y^2 = 64$ (4)
Subtraindo (3) de (1) .... $x^2-2xy+y^2 = 4$ (5)

Extraindo a raiz quadrada das equações (4) e (5) teremos:

$\left\{ \begin{aligned} x+y &= \pm 8 \\ x-y &= \pm 2 \end{aligned} \right\}$ (B)

O sistema (B) se desdobra em quatro sistemas que nos dão as quatro soluções do sistema (A), a saber:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= 5 \\ y &= 3 \end{aligned} \right\} \quad \left\{ \begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 5 \end{aligned} \right\} \quad \left\{ \begin{aligned} x &= -3 \\ y &= -5 \end{aligned} \right\} \quad \left\{ \begin{aligned} x &= -5 \\ y &= -3 \end{aligned} \right\}$$

Generalização. Os estudantes poderão provar facilmente que o problema é possível quando $a \geqq 2b$, substituindo 34 por a e 15 por b.

X. Resolução do sistema $\left\{ \begin{aligned} x^2 - y^2 &= 16 \\ xy &= 15 \end{aligned} \right\}$ $\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$ (A)

Elevando (1) ao quadrado.. $x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = 256$ (3)
Multiplicando (2) por 2 .... $2xy = 30$ (4)
Elevando (4) ao quadrado .... $4x^2y^2 = 900$ (5)
Somando (3) e (5) .... $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 1156$ (6)
Extraindo a raiz quadrada de (6) .... $x^2 + y^2 = \pm 34$ (B)

Combinando as duas equações (B) com a equação (1) do sistema (A) teremos:

$$\left\{ \begin{aligned} x^2+y^2 &= 34 \\ x^2-y^2 &= 16 \end{aligned} \right\} \qquad \left\{ \begin{aligned} x^2+y^2 &= -34 \\ x^2-y^2 &= 16 \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} x^2 &= 25 \\ y^2 &= 9 \end{aligned} \right\} \qquad \left\{ \begin{aligned} x^2 &= -9 \\ y^2 &= -25 \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \pm 5 \\ y &= \pm 3 \end{aligned} \right\} \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \pm 3i \\ y &= \pm 5i \end{aligned} \right\}$$

Obtemos, assim, para o sistema (A) *oito soluções*, pela combinação conveniente dos sinais dos valores de x e de y. Entretanto, as soluções do sistema (A) na realidade são *quatro*, a saber:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= +5 \\ y &= +3 \end{aligned} \right\} \quad \left\{ \begin{aligned} x &= -5 \\ y &= -3 \end{aligned} \right\} \quad \left\{ \begin{aligned} x &= +3i \\ y &= -5i \end{aligned} \right\} \quad \left\{ \begin{aligned} x &= -3i \\ y &= +5i \end{aligned} \right\}$$

Observemos que a equação (2) do sistema (A) foi elevada ao quadrado; portanto (§ 73, III) as outras *quatro* soluções, *extranhas ao sistema* (A), a saber:

$$\left\{\begin{aligned} x &= +5 \\ y &= -3 \end{aligned}\right\} \quad \left\{\begin{aligned} x &= -5 \\ y &= +3 \end{aligned}\right\} \quad \left\{\begin{aligned} x &= +3i \\ y &= +5i \end{aligned}\right\} \quad \left\{\begin{aligned} x &= -3i \\ y &= -5i \end{aligned}\right\}$$

convêm ao sistema

$$\left\{\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 16 \\ xy &= -15 \end{aligned}\right\}$$

Substituindo a por 16 e b por 15, convidamos os estudantes a mostrarem que o problema é possível quando $a \geqq 2b$.

Exercícios. Série LXII

Resolver, com duas incógnitas, os problemas dados na série XLI, empregando, sempre que for possível, os artifícios do segundo grau.

Resolver os sistemas que se seguem, pelos diferentes processos aprendidos, e apresentando sempre todas as soluções.

1. $x + y = 10$, $xy = 21$
2. $x + y = 18$, $xy = 65$
3. $x + y = 24$, $xy = 80$
4. $x - y = 11$, $xy = 12$
5. $x - y = 10$, $xy = 75$
6. $x - y = 17$, $xy = 60$
7. $x + y = 7$, $xy = 6$
8. $x + y = 13$, $xy = 22$
9. $x + y = 9$, $xy = 14$
10. $x - y = 9$, $xy = 10$
11. $x - y = 9$, $xy = 36$
12. $x - y = 10$, $xy = 75$
13. $x^2 + y^2 = 5$, $x + y = 3$
14. $x^2 + y^2 = 58$, $x + y = 10$
15. $x^2 + y^2 = 29$, $x + y = 7$
16. $x^2 + y^2 = 61$, $x - y = -1$
17. $x^2 + y^2 = 52$, $x - y = 2$
18. $x^2 + y^2 = 29$, $x - y = 7$
19. $x^2 - y^2 = 21$, $x + y = 3$
20. $x^2 - y^2 = -7$, $x + y = 1$
21. $x^2 - y^2 = 16$, $x + y = 2$
22. $x^2 - y^2 = 5$, $x - y = 5$
23. $x^2 - y^2 = 24$, $x - y = 6$
24. $x^2 - y^2 = -16$, $x - y = 2$
25. $x^2 + y^2 = 13$, $xy = -6$
26. $x^2 + y^2 = 41$, $xy = -20$
27. $x^2 + y^2 = 10$, $xy = -3$
28. $x^2 - y^2 = 7$, $xy = -12$
29. $x^2 - y^2 = 48$, $xy = -7$
30. $x^2 - y^2 = -21$, $xy = 10$

GEOMETRIA

Capítulo VII

Linhas Proporcionais. Semelhança

80. Princípio cartesiano ou lei dos sinais. Quando uma grandeza pode ser contada em dois sentidos opostos, se convencionarmos dar à grandeza contada em um sentido, o sinal *mais*, daremos à grandeza contada em sentido oposto, o sinal *menos*.

O tempo pode ser contado em dois sentidos: do presente para o futuro e do presente para o passado. Sendo positivo num sentido, será negativo no outro. As temperaturas são contadas acima e abaixo de zero; se forem positivas acima de zero, serão negativas abaixo de zero; pode ser o contrário.

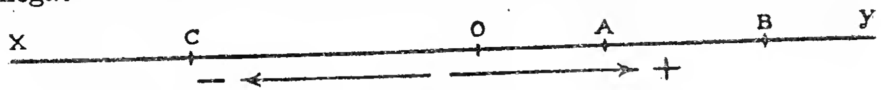


Fig. 8

Sôbre uma reta XY, tomemos um ponto fixo O, ao qual chamaremos *origem*. Nesta reta XY, as distâncias podem ser contadas nos dois sentidos indicados pelas flechas; *convencionemos que* as distâncias contadas de O para Y são *positivas* e as distâncias contadas de O para X são *negativas*; poderia ser o contrário.

Entretanto, estas convenções podem ser modificadas, de acôrdo com o problema proposto. (§ 31)

A razão de dois segmentos pode ser positiva ou negativa; isto depende do sinal dos segmentos. Consideremos os segmentos OA e OB (fig. 8) tendo por origem o ponto O. Se o sentido OY é considerado positivo, teremos $\frac{+\,OA}{+\,OB}$; a razão é positiva; se o sentido OY é considerado negativo, teremos $\frac{-\,OA}{-\,OB} = \frac{+\,OA}{+\,OB}$.

a razão é positiva. Consideremos os segmentos OA e OC (fig. 8) tendo por origem o ponto O. Se o sentido OY é considerado positivo, teremos $\frac{+\text{OA}}{-\text{OC}}$; a razão é negativa; se o sentido OY é considerado negativo, teremos $\frac{-\text{OA}}{+\text{OC}}$; a razão é negativa.

Problema. *Em uma reta existem dois pontos fixos,* A *e* B, *cuja distância é* 200 *metros. Determinar nesta reta um ponto cuja razão das distâncias aos pontos* A *e* B *seja igual a* $\frac{3}{5}$.

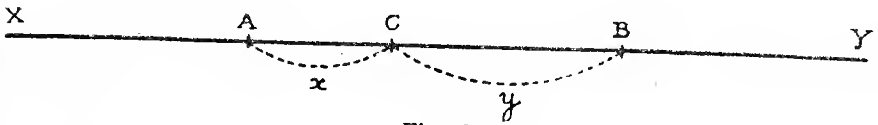


Fig. 9

Seja C o ponto pedido, *situado entre* A *e* B. As distâncias do ponto C aos pontos A e B são respectivamente CA e CB. Em Matemática, *razão é sinônimo de quociente*. Portanto, a razão das distâncias CA e CB é CA/CB. Poderiamos também escrever CB/CA mas, obedecendo inconcientemente à ordem alfabética, todos nós escrevemos CA/CB. A razão dada, 3/5, sendo menor que a unidade, é necessário que CA/CB seja também menor que a unidade. Eis porque colocámos o ponto C mais próximo de A do que de B. Façamos CA $= x$ e CB $= y$; de acôrdo com o enunciado do problema, teremos.

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{5} \therefore \frac{x+y}{x} = \frac{3+5}{3} \therefore \frac{200}{x} = \frac{8}{3} \therefore x = 75$$

Sendo x igual a 75, vamos à figura e, a partir do ponto A, *e para a direita*, medimos 75 metros e localizamos o ponto C. Quanto a y, teremos $y = 200 - 75 \therefore y = 125$. O ponto C é realmente o ponto pedido porque $\frac{\text{CA}}{\text{CB}} = \frac{x}{y} = \frac{75}{125} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$.

Mas, não haverá na reta XY, e *à esquerda do ponto* A, um segundo ponto D, cuja razão das distâncias aos pontos fixos A e B seja igual a $\frac{3}{5}$? E' o que vamos verificar.

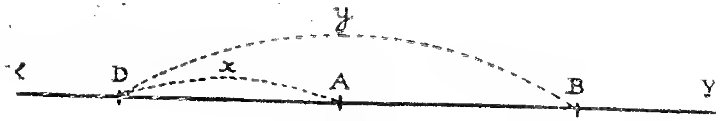


Fig. 10

Suponhamos que o ponto D satisfaz ao problema. Façamos DA $= x$ e DB $= y$. De acôrdo com o enunciado do problema, teremos:

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{5} \therefore \frac{x-y}{x} = \frac{3-5}{3} \therefore \frac{y-x}{x} = \frac{5-3}{3} \therefore \frac{200}{x} = \frac{2}{3} \therefore x = 300$$

Sendo x igual a 300, vamos à figura e, a partir do ponto A, *e para a esquerda*, medimos 300 metros e localizamos o ponto D. Quanto a y, teremos $y = x + 200 \therefore y = 300 + 200 \therefore y = 500$.
O ponto D é realmente o ponto pedido porque $\frac{\text{DA}}{\text{DB}} = \frac{x}{y} = \frac{300}{500} = \frac{3}{5}$.

Mas, não haverá na reta XY, e *à direita do ponto* B, um terceiro ponto E, cuja razão das distâncias aos pontos fixos A e B seja igual a $\frac{3}{5}$? E' o que vamos verificar.

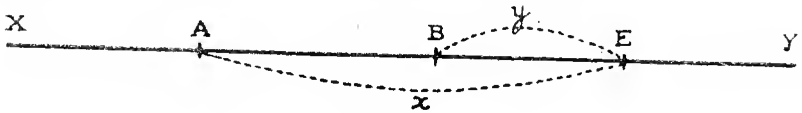


Fig. 11

Suponhamos que o ponto E satisfaz ao problema. Façamos EA $= x$ e EB $= y$. De acôrdo com o enunciado do problema, teremos:

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{5} \therefore \frac{x-y}{x} = \frac{3-5}{3} \therefore \frac{200}{x} = \frac{-2}{3} \therefore x = -300$$

Sendo x igual a -300, vamos à figura e, partindo do ponto A, medimos 300 metros, *não para a direita de* A, como pretendíamos, mas *para a esquerda*, de acôrdo com o princípio cartesiano, e localizamos o ponto E, em D, como na fig. 10.

Concluímos então que o nosso problema tem duas soluções: o ponto C e o ponto D. Sob o ponto de vista aritmético, assim

é, porque $\frac{75}{125}$ ou $\frac{300}{500}$ é igual a $\frac{3}{5}$. Entretanto, sob o ponto de vista algébrico, o problema tem apenas uma solução. Com efeito, se tomarmos para origem dos segmentos CA e CB, o ponto C (fig. 9), teremos $\frac{CA}{CB} = \frac{+CA}{-CB}$ ou $\frac{CA}{CB} = \frac{-CA}{+CB}$. Em ambos os casos, a razão $\frac{CA}{CB}$ é negativa.

Se tomarmos para origem dos segmentos DA e DB, o ponto D, (fig. 10) teremos $\frac{DA}{DB} = \frac{+DA}{+DB}$ ou $\frac{DA}{DB} = \frac{-DA}{-DB}$. Em ambos os casos, a razão $\frac{DA}{DB}$ é positiva. Logo, a solução algébrica do problema será o ponto C, se a fração dada $\frac{3}{5}$ for negativa; sendo positiva, a solução do problema será o ponto D.

81. Divisão harmônica. Teorema. *Em uma reta existe um ponto, e sòmente um, cuja razão das distâncias a dois pontos fixos A e B, situados na mesma reta, é igual a uma razão dada* $\frac{a}{b}$.

Dizer que os pontos A e B são dois pontos fixos, significa que a distância AB é conhecida. A razão dada $\frac{a}{b}$ pode ser menor ou maior do que a unidade, ou igual à unidade.

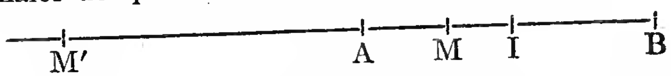


Fig. 12

1.º *caso:* $\frac{a}{b} < 1$. Seja I o ponto médio de AB, e d a distância AB. Suponhamos o problema resolvido e seja M um ponto tal que $\frac{MA}{MB} = \frac{a}{b}$. Não sabemos ainda qual é a posição exata do ponto M; estamos apenas supondo que o problema está resolvido, e colocando o ponto M *mais ou menos* entre A e B, e *necessàriamente à esquerda de* I, visto que a fração $\frac{a}{b}$, sendo própria, é necessário que MA seja menor do que MB. Isto pôsto, teremos:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{a}{b} \;\therefore\; \frac{MA + MB}{MA} = \frac{a+b}{a} \;\therefore\; \frac{d}{MA} = \frac{a+b}{a} \;\therefore\; MA = \frac{ad}{a+b}$$

Ora, a expressão aritmética $\frac{ad}{a+b}$, tendo sempre um valor determinado, e sòmente um, conclue-se que o ponto M existe realmente, estando situado entre A e B. Para localizá-lo, é bastante medir em AB, a partir de A, um comprimento igual a $\frac{ad}{a+b}$.

Admitamos agora que o ponto M', *situado à esquerda de* A, seja tal que $\frac{M'A}{M'B} = \frac{a}{b}$. Teremos:

$$\frac{M'A}{M'B} = \frac{a}{b} \;\therefore\; \frac{M'B}{M'A} = \frac{b}{a} \;\therefore\; \frac{M'B - M'A}{M'A} = \frac{b-a}{a} \;\therefore\; \frac{d}{M'A} = \frac{b-a}{a} \;\therefore\; M'A = \frac{ad}{b-a}$$

Ora, a expressão aritmética $\frac{ad}{b-a}$, tendo sempre um valor determinado e positivo (porque $b > a$), e sòmente um, conclue-se que o ponto M' existe realmente, estando situado à esquerda de A. Para localizá-lo, é bastante medir em AB, a partir de A, e para a esquerda, um comprimento igual a $\frac{ad}{b-a}$.

E' evidente que, à direita de B, não pode existir um ponto M'' tal que $\frac{M''A}{M''B}$, sendo sempre uma fração imprópria, seja igual a $\frac{a}{b}$ que, por hipótese, é uma fração própria. Aliás, se insistíssemos na determinação do ponto M'', acharíamos para M''A o valor $\frac{ad}{b-a}$, precedido do sinal *menos*, e o ponto M'' se confundiria então com o ponto M'. (§ 80)

Mas o teorema diz que em uma reta *existe um ponto, e sòmente um,* cuja razão das distâncias a dois pontos fixos A e B, da mesma reta, é igual a uma razão dada $\frac{a}{b}$. Entretanto, nós obtivemos dois pontos: M e M'. Como explicar esta contradição? Tal qual como fizemos anteriormente (§ 80); se a razão $\frac{a}{b}$ é negativa, a solução é o ponto M; sendo positiva, a solução é o ponto M'. Portanto,

$$\frac{MA}{MB} = -\frac{a}{b} \qquad \frac{M'A}{M'B} = +\frac{a}{b}$$

Não levando em conta os sinais, teremos:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B} \qquad \text{(I)}$$

Dizemos em Aritmética que três números a, b e c formam uma proporção harmônica quando $a - b : b - c :: a : c$. O têrmo b recebe o nome de *média harmônica*. Vamos demonstrar que a proporção (I) é uma proporção harmônica, cuja *média harmônica é* MM′, sendo os extremos M′A e M′B. De acôrdo com a figura temos MA = MM′ – M′A e MB = M′B – MM′. Substituindo em (I) teremos:

$$\frac{MM' - M'A}{M'B - MM'} = \frac{M'A}{M'B} \quad \therefore \quad \frac{M'A - MM'}{MM' - M'B} = \frac{M'A}{M'B} \qquad \text{C.Q.D.}$$

Os segmentos MA e MB são chamados *segmentos aditivos*, porque *sua soma é igual a* AB; os segmentos M′A e M′B são chamados *subtrativos*, porque *sua diferença é igual a* AB; os pontos M e M′ são chamados *conjugados harmônicos* dos pontos A e B, ou *dividem harmônicamente o segmento* AB; recìprocamente, os pontos A e B são os conjugados harmônicos dos pontos M e M′, ou dividem harmônicamente o segmento MM′. Não levando em conta o sinal, a razão dos segmentos subtrativos determinados pelo ponto M′ é igual à razão dos segmentos aditivos determinados pelo ponto M.

2.º *caso:* $\frac{a}{b} > 1$. Repetindo tudo o que fizemos no 1.º caso, acharemos um ponto N entre A e B, *e mais próximo de* B *do que de* A, e um ponto N′ *à direita de* B.

3.º *caso:* $\frac{a}{b} = 1$. Vimos no primeiro caso que

$$MA = \frac{ad}{a+b} \quad \text{e} \quad M'A = \frac{ad}{b-a}$$

Sendo $\frac{a}{b} = 1$, donde $a = b$, vamos substituir, nestas duas fórmulas, b por a. Teremos:

$$MA = \frac{ad}{a+a} = \frac{ad}{2a} = \frac{d}{2} \text{ e } M'A = \frac{ad}{a-a} = \frac{ad}{0} = \infty$$

Portanto, o ponto M é o **ponto** médio de AB, e o ponto M′ fica situado na reta AB, a uma distância infinitamente grande dos pontos A e B.

Observação. O nome dado à proporção (I) de *proporção harmônica* tem sua origem na música. Quando uma corda sonora produz o acorde perfeito **do, mí, sol,** ela é ferida sucessivamente em três pontos que correspondem a comprimentos desta corda proporcionais aos números 1, 4/5 e 2/3. (Comberousse, Curso de Matemática, 2.º volume, pág. 197) Com efeito, êstes três números formam uma proporção harmônica, a saber:

$$1 - \frac{4}{5} : \frac{4}{5} - \frac{2}{3} :: 1 : \frac{2}{3}$$

Os estudantes devem verificar esta proporção.

Exercícios. Série XLIII

1. Em uma reta existem dois pontos fixos, A e B, sendo AB = 40m. Determinar entre os pontos A e B um ponto cuja razão das distâncias aos pontos A e B seja igual a $\frac{3}{8}$.

Os estudantes acharão $x = 10{,}909$m (com êrro inferior a 1mm por falta) e $y = 29{,}091$m (com êrro inferior a 1mm por excesso). Mas, porque *por excesso?* E′ o que vamos explicar. O valor obtido para x resultou da divisão de 210 por 11. Como esta divisão deixou resto, x é igual a 10,909m mais uma fração que não atinge a um milímetro. Chamando e a esta fração teremos:

$$x = 10{,}909\text{m} + e \quad \therefore \quad y = 40 - (10{,}909\text{m} + e) \quad \therefore$$

$$y = 40\text{m} - 10{,}909\text{m} - e \quad \therefore \quad y = 29{,}091\text{m} - e$$

Ora, tendo nós suprimido a quantidade e, no valor de y, segue-se que y não é igual a 29,091m; y é igual a 29,091m menos o valor de e. Portanto, 29,091m é um valor de y, aproximado por excesso. E sendo e inferior a 1mm, o excesso de 29,091m sôbre o verdadeiro valor de y, é inferior a 1mm.

2. Dado um segmento AB, com 40m, determinar em seu prolongamento um ponto cuja razão das distâncias aos pontos A e B seja igual a $\frac{3}{8}$.

3. Dividir um segmento AB, com 60m, em dois segmentos proporcionais aos números 7 e 9. Dar as duas soluções.

4. Em um segmento AB, com 80m, determinar um ponto cuja razão das distâncias aos pontos A e B seja igual a $\frac{15}{7}$. Dar as duas soluções.

5. Dividir um segmento AB, com 50m, em dois segmentos cuja razão seja igual a 2,7. Dar as duas soluções.

6. Calcular os segmentos aditivos e subtrativos de um segmento de 120m, que foi dividido segundo a razão $\frac{11}{17}$.

7. Calcular os segmentos aditivos e subtrativos de um segmento AB com 23,76m e que foi dividido segundo a razão 9,2/11,5.

8. Dado um segmento AB, com 36m, determinar os conjugados harmônicos C e D, de acôrdo com a razão $1/5$.

9. Um segmento AB mede 32m. Um ponto C divide êste segmento em dois segmentos aditivos cuja razão é 7. Sendo D o conjugado harmônico de C, quanto medem os segmentos AD, CD e BD?

10. Um segmento AB com 45m está dividido harmônicamente pelos pontos C e D. Estando o ponto D à esquerda de A, e sendo DA = 67,5m, determinar a razão x/y segundo a qual o segmento AB foi dividido harmônicamente pelos pontos C e D, e calcular os segmentos CA e CB.

82. Primeiro teorema de Tales. *Toda a reta paralela a um dos lados de um triângulo, divide os outros dois lados em segmentos proporcionais.*

H $\{ DE \parallel BC$ T. $\left\{ \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{EA}{EC} \right.$

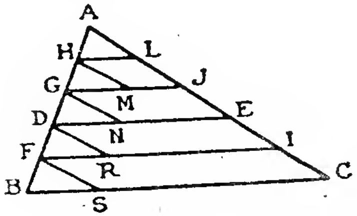


Fig. 13

Admitamos que os segmentos DA e DB têm uma medida comum, a qual está contida três vêzes em DA e duas vêzes em DB. Então,

$$\frac{DA}{DB} = \frac{3}{2} \quad \text{(I)}$$

Pelos pontos F, G, H, tracemos os segmentos FI, GJ, HL $\parallel$ à base do $\triangle$ ABC, Em seguida, pelos pontos F, D, G, H, tracemos os segmentos HM, GN, DR, FS $\parallel$ à AC. Formaremos assim os $\triangle$s AHL, HGM, GDN, DRF, FSB. Ora, estes cinco $\triangle$s são iguais de acôrdo com o 1.° caso de igualdade dos $\triangle$s. Logo, AL = HM = GN = DR = FS. Mas, HM = LJ, GN = JE, DR = EI, FS = IC, como lados opostos de um $\square$. Portanto,

$AL = LJ = JE = EI = IC \;\therefore$
$EA = 3IC$ e $EC = 2IC \;\therefore$

$$\frac{EA}{EC} = \frac{3}{2} \quad \text{(II)}$$

Comparando as igualdades (I) e (II), teremos:

$$\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}$$

Fica assim demonstrado o teorema. Se os segmentos DA e DB não têm medida comum, é fácil provar (E.M.T.V. § 149) que mesmo neste caso o teorema continua a subsistir.

Recíproca. *Se uma reta divide dois lados de um triângulo em segmentos proporcionais, ela é paralela ao terceiro lado.*

H. $\left\{ \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{EA}{EC} \right.$ T. $\{ DE \parallel BC$

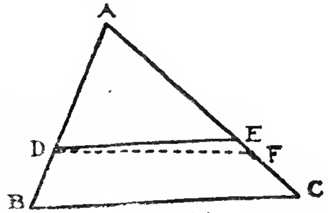


Fig. 14

Neguemos a tese e admitamos que DE não é $\parallel$ BC; pelo ponto D tracemos DF $\parallel$ BC. Teremos:

$\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{FA}{FC}$ (teorema direto) $\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{EA}{EC}$ (hipótese)

Destas duas proporções deduzimos:

$$\frac{FA}{FC} = \frac{EA}{EC} \;\therefore\; \frac{FA+FC}{FA} = \frac{EA+EC}{EA} \;\therefore\; \frac{AC}{FA} = \frac{AC}{EA} \;\therefore\; FA = EA$$

Sendo FA = EA, o ponto F coincide com o ponto A.

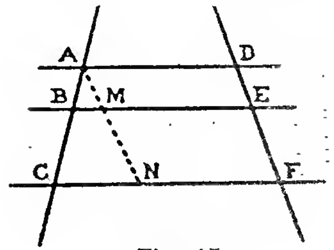


Fig. 15

Corolário. *Duas retas quaisquer são cortadas em partes proporcionais por uma série de paralelas.*

H. $\{ AD \parallel BE \parallel FC$

T. $\left\{ \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF} \right.$

Tracemos pelo ponto A, AN $\parallel$ DF.

Então, no $\triangle$ ACN, teremos $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AM}{MN}$. Mas AM = DE e MN=EF. (por que?) Logo, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$.

83. As bissetrizes no triângulo. Teorema. *A bissetriz do ângulo de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados do ângulo.*

H. $\left\{ \begin{array}{l} ABC \text{ é um } \triangle. \\ \hat{1} = \hat{2} \end{array} \right.$ T. $\left\{ \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{CA}{CB} \right.$

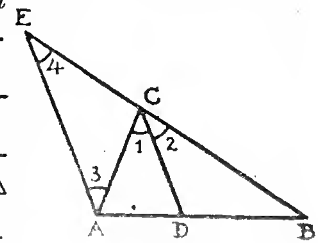


Fig. 16

Peló ponto A tracemos AE $\parallel$ CD e prolonguemos BC até encontrar AE. No $\triangle$ ABE, temos CD $\parallel$ AE. Logo, $\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{CE}{CB}$.
(primeiro teorema de Tales)

Se conseguirmos provar que CE = CA, teremos chegado à tese. Mas, para provar que CE = CA, é bastante provar que $\hat{3} = \hat{4}$. Ora, $\hat{3} = \hat{1}$ (por que?) e $\hat{4} = \hat{2}$ (por que?). Mas $\hat{1} = \hat{2}$ (hip.). Logo, $\hat{3} = \hat{4}$. (por que?) Então o $\triangle$ AEC é isósceles, $\therefore$ CE = CA. Voltando à igualdade $\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{CE}{CB}$ e nela substituindo CE por CA, teremos chegado à tese.

Teorema. *A bissetriz do ângulo externo de um triângulo divide o lado oposto ao ângulo interno adjacente em segmentos proporcionais aos lados dêsse mesmo ângulo interno.*

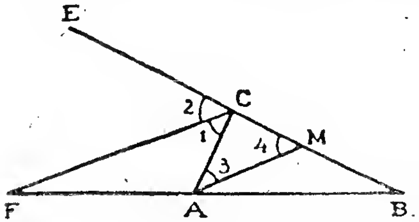


Fig. 17

H. $\begin{cases} ABC \text{ é um } \triangle. \\ \hat{1} = \hat{2} \end{cases}$

T. $\left\{ \dfrac{FA}{FB} = \dfrac{CA}{CB} \right.$

Pelo ponto A tracemos AM $\parallel$ FC. No $\triangle$ CBF, temos AM $\parallel$ CF; logo,

$$\frac{FA}{FB} = \frac{CM}{CB} \quad \text{(primeiro teorema de Tales)}$$

Se conseguirmos provar que CM = CA, teremos chegado à tese. Mas, para provar que CM = CA, é bastante provar que $\hat{3} = \hat{4}$. Ora, $\hat{3} = \hat{1}$ (por que?) e $\hat{4} = \hat{2}$ (por que?). Mas, $\hat{1} = \hat{2}$ (hip.) Logo, $\hat{3} = \hat{4}$. (por que?) Então o $\triangle$ ACM é isósceles, $\therefore$ CM = CA. Voltando à igualdade $\dfrac{FA}{FB} = \dfrac{CM}{CB}$, e nela substituindo CM por CA, teremos chegado à tese.

Recíproca. *Dado um triângulo ABC (fig.18), se o segmento AD divide BC em segmentos proporcionais aos lados AB e AC, êste segmento é bissetriz do ângulo A.* (Ao cuidado do estudante; §82 recíproca.)

Recíproca. *Dado um triângulo ABC (fig.18), se o segmento AF divide BC em segmentos proporcionais aos lados AB e AC, êste segmento é bissetriz do ângulo externo adjacente ao ângulo A.* (Ao cuidado do estudante; §82, recíproca.)

Observação. Seja ABC (fig. 18) um $\triangle$ qualquer, seja AD a bissetriz do $\angle$ BAC e AF a bissetriz do $\angle$ externo BAE.

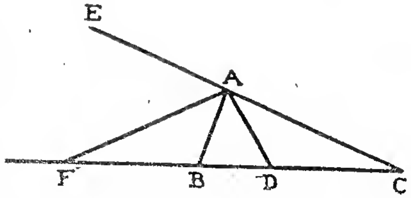


Fig. 18

De acôrdo com os dois últimos teoremas demonstrados, teremos:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad \text{e} \quad \frac{FB}{FC} = \frac{AB}{AC} \quad \therefore \quad \frac{DB}{DC} = \frac{FB}{FC}$$

Portanto, *a bissetriz do $\angle$ interno de um $\triangle$ e a bissetriz do $\angle$ externo adjacente determinam, no lado oposto, dois pontos* D *e* F *que são conjugados harmônicos dos pontos* B *e* C.

São dados dois pontos B e C. Sejam D e F os conjugados harmônicos de B e C, de acôrdo com uma razão dada $\dfrac{m}{n}$.

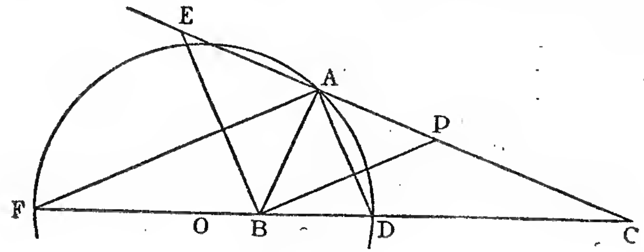


Fig. 19

Suponhamos que, para um ponto qualquer A, situado no mesmo plano dos pontos B e C, temos também a relação

$$\frac{AB}{AC} = \frac{m}{n}.$$

Construindo o $\triangle$ ABC, resulta, de acôrdo com os dois teoremas anteriores que:

AD é a bissetriz do ângulo BAC.
AF é a bissetriz do ângulo BAE.

Porém, $B\hat{A}C + B\hat{A}E = 2$ retos. (por que?)

Logo, $B\hat{A}D + B\hat{A}F = D\hat{A}F = 1$ reto.

Ora, o ângulo DAF sendo reto, se traçarmos uma ○ tendo por diâmetro o segmento FD, esta ○ passará necessàriamente pelo ponto A. (E.M.T.V. § 152, II)

Logo, se o ponto A satisfaz à relação $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{m}{n}$, êste ponto está situado numa ○ tendo por diâmetro FD.

Agora é preciso provar que, *para qualquer ponto* A da ○ tendo por diâmetro FD, subsiste sempre a relação $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{m}{n}$.

Seja A um ponto qualquer desta ○.

Pelo ponto B tracemos BP ∥ AF e BE ∥ AD.

Se o ângulo DAF é reto, o ângulo PBE também é reto. (E.M.T.V. § 110)

No △ CBE temos $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AE}{AC}$. (1)

No △ CAF temos $\dfrac{FB}{FC} = \dfrac{AP}{AC}$.

Ora, sendo $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{FB}{FC}$, resulta que $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AP}{AC}$ ∴ AE = AP.

Donde se conclue que o ponto A é o centro da ○ descrita sôbre EP como diâmetro. Logo, AE = AP = AB.

Então, voltando à igualdade (1) podemos escrever:

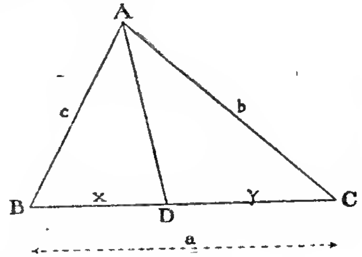
$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

Porém, $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{m}{m}$. Logo, $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{m}{n}$. Conclusão:

> ***O lugar geométrico dos pontos de um plano, cuja razão das distâncias a dois pontos fixos dêste plano, B e C, é igual a uma razão dada $\dfrac{m}{n}$, isto é, constante, é uma circunferência, cujo diâmetro é o segmento retilíneo FD que une os conjugados harmônicos dos pontos B e C.***

Exercícios. Série XLIV

1. Em um △ABC, $a = 23$m, $b = 18$m e $c = 17$m. Calcular os segmentos determinados no lado a pela bissetriz do ∠ A.



Sejam x e y os segmentos que a bissetriz do ∠ A determina no lado a. Então,

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{b} \text{ (por que?) } \therefore \frac{x+y}{x} = \frac{c+b}{c} \therefore$$

$$\frac{a}{x} = \frac{c+b}{c} \therefore \frac{23}{x} = \frac{35}{17} \therefore$$

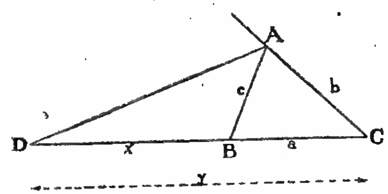
$$x = \frac{17 \times 23}{35} \therefore x = \frac{391}{35} \therefore$$

$$y = 23 - \frac{391}{35} \therefore y = \frac{805}{35} - \frac{391}{35} \therefore y = \frac{414}{35} \therefore$$

$$x = 11{,}171\text{m} \qquad y = 11{,}828\text{m}$$

R. Os dois segmentos pedidos medem 11,171m e 11,828m, com êrro inferior a um milímetro.

2. Em um △ ABC, $a = 23$m, $b = 18$m e $c = 17$m. Calcular os segmentos determinados no lado a pela bissetriz do ∠ externo adjacente ao ∠ A.



Sejam x e y os segmentos que a bissetriz do ∠ externo adjacente ao ∠ A, determina no lado a. Então,

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{b} \text{ (por que?) } \therefore$$

$$\frac{x-y}{x} = \frac{c-b}{c} \therefore \frac{-a}{x} = \frac{c-b}{c} \therefore$$

$$\frac{-23}{x} = \frac{17-18}{17} \therefore \frac{23}{x} = \frac{1}{17} \therefore x = 391 \therefore y = 391 + 23 = 414$$

$$x = 391\text{m} \qquad y = 414\text{m}$$

R. Os dois segmentos pedidos medem 391m e 414m.

3. Em um △ ABC, $a = 10$m, $b = 5$m e $c = 8$m. Calcular os segmentos determinados no lado a pela bissetriz do ∠ A.

4. No mesmo △ calcular os segmentos determinados no lado a pela bissteriz do ∠ externo adjacente ao ∠ A.

5. Em um △ ABC, AB = 5m e AC = 7m. Entre B e C existe um ponto M tal que MB = 3,75m e MC = 5,25m. No prolongamento de BC existe um ponto N tal que NB = 22,5m e NC = 31,5m. Traçam-se os segmentos AM e AN. Provar que AM é bissetriz do ∠ A e AN é bissetriz do ∠ externo adjacente ao ∠ A.

N. B. Provar primeiramente que $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{NB}{NC} = \dfrac{AB}{AC}$. Depois...

6. Duas retas AB e CD são cortadas por 5 ‖ em 4 segmentos cada uma. Os 4 segmentos de AB, isto é, AE, EF, FG e GB, medem respectivamente 5, 10, 12 e 13 metros. Calcular os 4 segmentos correspondentes de CD, isto é, CH, HI, IJ e JD, sabendo que CD = 120m.

7. De um ponto O partem 3 semirretas seguindo direções diferentes. Duas ‖ cortam as três semirretas: a primeira nos pontos A, B e C (da esquerda para a direita) e a segunda nos pontos D, E e F (da esquerda para a direita). Sendo OA = 3m, OB = 9m, OC = 12m, AB = 6m, BC = 13m e AD = 7m, calcular BE, CF, DE e EF.

8. Construir a quarta proporcional a três segmentos dados. (§ 88)

Observação. Para a definição da quarta ou da terceira proporciona é útil consultar E.M.S.V. § 58.

9. Calcular a quarta proporcional aos números 13, 27, e 52.

10. Construir a quarta proporcional aos números 7, 10 e 12, sendo a unidade de comprimento igual a um centímetro.

11. Construir a terceira proporcional a dois segmentos dados. (§ 88)

12. Calcular a terceira proporcional aos números 15 e 40. ($15 : 40 :: 40 : x$ ou $x : 40 :: 40 : 15$)

13. Construir a terceira proporcional aos números 5 e 8, sendo a unidade de comprimento igual a um centímetro.

14. Dividir um segmento de 20 metros em três segmentos proporcionais aos números 2, 3 e 4.

15. Dividir gràficamente um segmento de 10 centímetros em três segmentos proporcionais aos números 2, 3 e 4.

16. Dividir gràficamente um segmento em 3 partes iguais.

17. Dividir gràficamente um segmento em 5 partes iguais.

18. Em um △ ABC, AB = 17m e AC = 25m. Toma-se em AB um comprimento AD com 6m e traça-se DE ‖ NC. Calcular os segmentos AE e EC.

19. Em um △ ABC, AB = 25m e AC = 32m. Tomam-se em AB, os segmentos AD e DE medindo, respectivamente, 6m e 9m. Pelos pontos D e E traçam-se as retas DF e EG, ‖ BC. Calcular os segmentos AF, FG e GC.

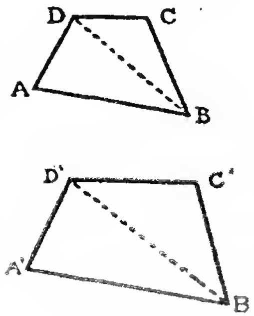


Fig. 20

84. Semelhança de triângulos. *Dois polígonos são semelhantes quando seus ∡ são iguais dois a dois e seus lados são proporcionais.* Sejam os polígonos ABCDA e A'B'C'D'A'. Para que sejam semelhantes é necessário que satisfaçam às duas condições seguintes, às quais chamaremos *condições de semelhança de dois polígonos.*

Primeira condição. E' necessário que

$$\hat{A} = \hat{A}' \quad \hat{B} = \hat{B}', \quad \hat{C} = \hat{C}', \quad \hat{D} = \hat{D}'.$$

Segunda condição. E' necessário que os lados dos dois polígonos, *sendo medidos com a mesma unidade,* os resultados sejam tais que tenhamos

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'}.$$

Estas duas condições são necessárias e suficientes.

Elementos homólogos de dois polígonos semelhantes são os elementos que se correspondem. Assim, se os polígonos ABCDA e A'B'C'D'A' são semelhantes, os vértices A e A' são *homólogos,* os ∡ A e A' são *homólogos,* os lados AB e A'B' são *homólogos,* as diagonais AC e A'C' são *homólogas,* etc..

Razão de semelhança de dois polígonos semelhantes é a razão de dois lados homólogos. Assim, se os polígonos ABCDA e... A'B'C'D'A' são semelhantes, sua razão de semelhança é $\frac{AB}{A'B'}$.

85. Segundo teorema de Tales. *Cortando um triângulo por uma paralela a um dos lados, o triângulo parcial assim formado é semelhante ao total.*

Consideremos o △ ABC (fig.21) e tracemos MN ‖ BC. Vamos provar que o △ AMN é semelhante ao △ ABC. O ∠ A é comum aos dois △. O ∠ 1 é igual ao ∠ 2, porque são correspondentes formados pelas ‖ BC e MN, cortadas pela transversal AB. O ∠ 3 é igual ao ∠ 4 pelo mesmo motivo. Portanto, os ∡ do △ AMN são respectivamente iguais aos ∡ do △ ABC; então, a primeira condição para que os dois △ sejam semelhantes, está preenchida. Resta provar que os lados homólogos são proporcionais. Sendo MN ‖ BC, já sabemos que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ (1) (§ 82) Tracemos pelo ponto N, a reta NR ‖ AB.

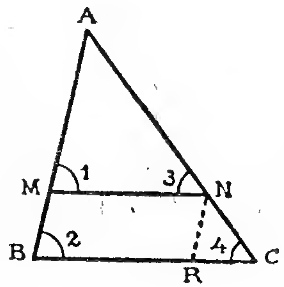


Fig. 21

$$\frac{AN}{AC} = \frac{BR}{BC} \quad \text{Mas, BR = MN (por que?)} \quad \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \quad (2)$$

Combinando (1) e (2) .... $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$, isto é, os lados homólogos dos dois $\triangle$ são proporcionais. Nestas condições, se os $\triangle$ AMN e ABC têm $\measuredangle$ iguais e lados proporcionais, êstes dois $\triangle$ são semelhantes.

86. Casos de semelhança de dois triângulos. Teorema. *Dois triângulos são semelhantes quando têm seus ângulos iguais, dois a dois.*

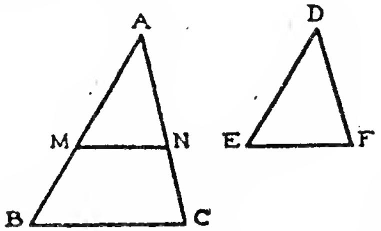


Fig. 22

$$\text{H.} \begin{cases} \hat{A} = \hat{D} \\ \hat{B} = \hat{E} \\ \hat{C} = \hat{F} \end{cases} \qquad \text{T.} \{ \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Sôbre AB, a partir de A, tomemos um segmento AM = DE. E, pelo ponto M tracemos MN ∥ BC. Então $\triangle$ AMN $\sim$ $\triangle$ ABC. (segundo teorema de Tales) Comparemos os $\triangle$ AMN e DEF.

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{M} \text{ (corresp.)} \\ \hat{B} = \hat{E} \text{ (hip.)} \end{array} \right\} \therefore \hat{M} = \hat{E}$$

$$\hat{A} = \hat{D} \text{ (hip.)} \qquad AM = DE \text{ (constr.)}$$

Donde $\triangle$ AMN = $\triangle$ DEF. (1.º caso) Mas $\triangle$ AMN $\sim$ $\triangle$ ABC. Logo, $\triangle$ DEF $\sim$ ABC, como queríamos demonstrar.

Teorema. *Dois triângulos que têm um ângulo igual compreendido entre lados proporcionais, são semelhantes.*

$$\text{H.} \begin{cases} \hat{A} = \hat{D} \\ \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \end{cases} \qquad \text{T.} \{ \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Sôbre AB, a partir de A (fig.22), tomemos um segmento AM = DE. Pelo ponto M tracemos MN ∥ BC. Então $\triangle$ AMN $\sim$ $\triangle$ ABC. (segundo teorema de Tales) Comparemos os $\triangle$ AMN e DEF.

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} \quad (\S 82)$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \text{ (hip.) Mas } AM = DE \text{ por construção } \therefore \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{DF}$$

Comparando a primeira proporção com a terceira, resulta $\frac{AC}{AN} = \frac{AC}{DF}$. Se duas razões têm o mesmo numerador, seus denominadores são iguais; logo,

$$\begin{array}{l} AN = DF \\ AM = DE \text{ (construção)} \\ \hat{A} = \hat{D} \text{ (hip.)} \\ \triangle AMN = \triangle DEF \text{ (2.º caso)} \end{array}$$

Mas $\triangle$ AMN $\sim$ $\triangle$ ABC. (§85) Logo,

$\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ DEF.

C.Q.D.

Teorema. *Dois triângulos que têm seus lados proporcionais, são semelhantes.*

$$\text{H.} \left\{ \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \right. \qquad \text{T.} \{ \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Sôbre AB a partir de A (fig. 22), tomemos um segmento AM = DE. E pelo ponto M tracemos MN ∥ BC. Então.... $\triangle$ AMN $\sim$ $\triangle$ ABC. (§85) Ora,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \text{ (hip.) e } \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN} \quad (\S 85)$$

Comparemos o primeiro grupo de razões com o segundo. Sendo DE = AM (construção) a primeira razão do 1.º grupo, isto é, $\frac{AB}{DE}$, é igual à primeira razão do 2.º grupo, isto é, $\frac{AB}{AM}$. Então as seis razões são iguais. Por exemplo, $\frac{AC}{DF} = \frac{AC}{AN} \therefore DF = AN$; $\frac{BC}{EF} = \frac{BC}{MN} \therefore EF = MN$. Logo, os $\triangle$ AMN e DEF são iguais. (3.º caso) Mas $\triangle$ AMN $\sim$ $\triangle$ ABC. (§85) Logo, $\triangle$ DEF $\sim$ $\triangle$ ABC, como queríamos demonstrar.

Do primeiro teorema e do terceiro, resulta que:

I. Quando dois $\triangle$ têm seus $\measuredangle$ iguais, dois a dois, seus lados são proporcionais e os dois $\triangle$ são semelhantes.

II. Quando dois $\triangle$ têm seus lados proporcionais, seus $\measuredangle$ são iguais, dois a dois, e os dois $\triangle$ são semelhantes.

Teorema. *Dois triângulos são semelhantes quando têm seus lados paralelos ou perpendiculares.*

Se os lados de dois $\triangle$ são $\parallel$ ou $\perp$s, os $\measuredangle$ dêstes dois $\triangle$ são iguais ou supls. (E.M.T.V. §§ 110 e 111) Sejam A, B, C e A′, B′, C′ os $\measuredangle$ dêstes dois $\triangle$, e estabeleçamos as hipóteses seguintes:

1.ª hipótese. $\hat{A}+\hat{A}' = 2$ retos, $\hat{B}+\hat{B}' = 2$ retos, $\hat{C}+\hat{C}' = 2$ retos.

Esta hipótese deve ser rejeitada porque a soma dos seis $\measuredangle$ de dois $\triangle$ não pode ser igual a seis retos.

2.ª hipótese. $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B}+\hat{B}' = 2$ retos, $\hat{C}+\hat{C}' = 2$ retos.

Esta hipótese também deve ser rejeitada porque a soma dos $\measuredangle$ de dois $\triangle$, sendo 4 retos, e sendo $\hat{B}+\hat{B}'+\hat{C}+\hat{C}' = 4$ retos, os $\measuredangle$ A e A′ seriam nulos, o que é absurdo.

3.ª hipótese. $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C}+\hat{C}' = 2$ retos. Mas, sendo $\hat{A}=\hat{A}'$ e $\hat{B}=\hat{B}'$, então $\hat{C}=\hat{C}'$ e os dois $\triangle$ são semelhantes.

Teorema. *Duas paralelas são cortadas em partes proporcionais por uma série de secantes traçadas por um mesmo ponto.*

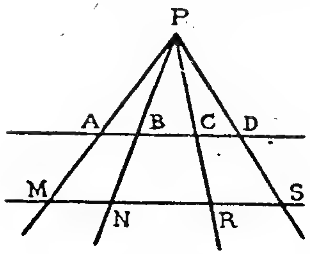


Fig. 23

H. $\{$ AD $\parallel$ MS

T. $\left\{ \dfrac{AB}{MN} = \dfrac{BC}{NR} = \dfrac{CD}{RS} \right.$

Os $\triangle$ PAB e PMN são semelhantes (§85); o mesmo acontece com os $\triangle$ PBC e PNR, assim como com os $\triangle$ PCD e PRS. Portanto,

$$\frac{PA}{PM} = \frac{AB}{MN} = \frac{PB}{PN};\quad \frac{PB}{PN} = \frac{BC}{NR} = \frac{PC}{PR};\quad \frac{PC}{PR} = \frac{CD}{RS} = \frac{PD}{PS}$$

A última razão do 1.º grupo é idêntica à primeira do segundo; a última razão do segundo grupo é idêntica à primeira do terceiro; portanto, as nove razões são iguais e, suprimindo aquelas que não nos interessam, chegaremos facilmente à tese.

87. Semelhança de polígonos. *Dois polígonos constituídos por um mesmo número de triângulos semelhantes, e semelhantemente dispostos, são semelhantes.*

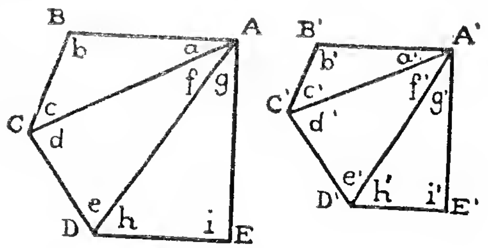


Fig. 24

H. $\left\{ \begin{array}{l} \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \\ \triangle ACD \sim \triangle A'C'D' \\ \triangle ADE \sim \triangle A'D'E' \end{array} \right.$

T. $\{$ ABCDEA $\sim$ A′B′C′D′E′A′

Se os $\triangle$ ABC e A′B′C′ são semelhantes, então $\hat{a}=\hat{a}'$, $\hat{b}=\hat{b}'$, $\hat{c}=\hat{c}'$. Anàlogamente $\hat{d}=\hat{d}'$, $\hat{e}=\hat{e}'$, $\hat{f}=\hat{f}'$ e $\hat{g}=\hat{g}'$, $\hat{h}=\hat{h}'$, $\hat{i}=\hat{i}'$. Destas igualdades deduziremos facilmente que $\hat{A}=\hat{A}'$, $\hat{B}=\hat{B}'$, $\hat{C}=\hat{C}'$, $\hat{D}=\hat{D}'$, $\hat{E}=\hat{E}'$. Portanto, está preenchida uma das condições para que os dois polígonos sejam semelhantes. Resta provar que os lados homólogos são proporcionais. Ora, de acôrdo com a hipótese, temos:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'};\quad \frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'};\quad \frac{AD}{A'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{AE}{A'E'}$$

Como no teorema anterior, é fácil verificar que estas nove razões são iguais. Igualando-as e suprimindo as razões que não nos interessam, teremos:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{AE}{A'E'}.$$

Portanto, se os dois polígonos têm seus $\measuredangle$ iguais, dois a dois, e seus lados homólogos proporcionais, êles são semelhantes.

Recíproca. *Dois polígonos semelhantes podem sempre ser decompostos em um mesmo número de triângulos semelhantes e semelhantemente dispostos.*

H. $\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}=\hat{A}',\ \hat{B}=\hat{B}',\ \hat{C}=\hat{C}',\ \hat{D}=\hat{D}',\ \hat{E}=\hat{E}' \\ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{DE}{D'E'} = \dfrac{AE}{A'E'} \end{array} \right.$

$$\text{T.}\begin{cases}\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \\ \triangle ACD \sim \triangle A'C'D' \\ \triangle ADE \sim \triangle A'D'E'\end{cases}$$

De acôrdo com a hipótese, os $\triangle$ ABC e A'B'C' (fig. 24) são semelhantes. (2.º caso de semelhança dos $\triangle$) Portanto,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}. \quad \text{Mas,} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}. \quad \text{Logo,} \quad \frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'}.$$

Logo, os $\triangle$ ACD e A'C'D' têm dois lados proporcionais. Além disso, sendo $\hat{C} = \hat{C}'$ (hip.) e $\hat{c} = \hat{c}'$ (os $\triangle$ ABC e A'B'C' são semelhantes) então $\hat{d} = \hat{d}'$. Logo, os $\triangle$ ACE e A'C'D' também são semelhantes. (2.º caso de semelhança dos $\triangle$) De um modo análogo se provará que os $\triangle$ ADE e A'D'E' são semelhantes.

Observação. *Dois polígonos regulares, com o mesmo número de lados, são semelhantes.*

Com efeito, se os polígonos são regulares, seus lados são iguais e seus ∡ também são iguais. Quer no primeiro polígono, quer no segundo, o valor de cada ∠ é $\frac{2(n-2)}{n}$ ∡ retos porque, por hipótese, os dois polígonos têm o mesmo número de lados. Portanto, os ∡ do primeiro polígono são iguais aos ∡ do segundo. Resta provar que os lados homólogos são proporcionais. Mas isto é evidente, visto que os lados do primeiro polígono são iguais entre si, assim como os lados do segundo.

Teorema. *Quando dois polígonos são semelhantes, a razão de seus perímetros é igual à razão de semelhança dos mesmos polígonos.*

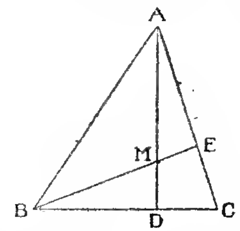
O perímetro do polígono ABCDEA é AB+BC+CD+DE+EA. Façamos esta soma igual a P. Anàlogamente, o perímetro do polígono A'B'C'D'E'A' é P'. Vamos demonstrar que $\frac{P}{P'} = \frac{AB}{A'B'}$. Se os polígonos são semelhantes, teremos:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'} \quad \therefore \quad \text{(E.M.S.V. § 62)}$$

$$\frac{AB+BC+CD+DE+EA}{A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+E'A'} = \frac{AB}{A'B'} \quad \therefore \quad \frac{P}{P'} = \frac{AB}{A'B'}$$

Exercícios. Série XLV

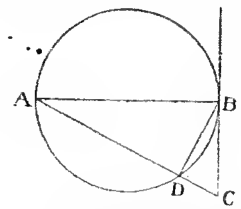
Regra. *Para provar que um produto de dois segmentos é igual a um outro produto também de dois segmentos, procuram-se dois $\triangle$ dos quais êstes quatro segmentos façam parte; prova-se que os dois $\triangle$ são semelhantes, estabelece-se a proporcionalidade de seus lados, suprime-se a razão que não interessa à tese, e aplica-se à proporção obtida o teorema fundamental das proporções.* (Vide § 94, observação final.)



1. Hip. { AD e BE são alturas do $\triangle$ ABC.

Tese. { BC × DC = AC × CE

2. Demonstrar que, em um $\triangle$ qualquer, o produto de uma altura pelo lado que lhe é ⊥, é igual ao produto da outra altura pelo lado que lhe é ⊥. Vide fig. do exercício anterior. A tese é AD × BC = BE × AC.



3. Em um $\triangle$ ABC, $a = 13$, $b = 14$ e $c = 15$. A altura relativa ao lado b é igual a **12**. Calcular as outras alturas.

4. Hip. { AB é diâmetro e BC é tangente.

Tese. { $\overline{AB}^2 = AD \times AC$

5. No exercício anterior, tomar a mesma hipótese e demonstrar que $\overline{BD}^2 = DA \times DC$.

6. Ligam-se os três vértices de um $\triangle$ ABC a um ponto interior O. Dividem-se os segmentos OA, OB e OC em duas partes iguais e unem-se os pontos de divisão, formando um $\triangle$ DEF. Demonstrar que os $\triangle$ ABC e DEF são semelhantes.

7. Dá-se um quadrilátero inscrito ABCD. Prolongam-se os lados AB e DC até que se encontrem num ponto E. Traça-se a corda BD. Por hipótese, o ∠ DBA é igual ao ∠ CBE. Provar que AD × BE = CE × BD.

8. Com a figura do exercício anterior e as mesmas hipóteses, provar que EC × AD = BC × EA.

9. Provar que, em dois $\triangle$ semelhantes, duas medianas homólogas estão entre si como dois lados homólogos.

10. Voltando à figura do exercício 1, e fazendo as mesmas hipóteses, provar que MB × ME = MA × MD.

11. Voltando à figura do exercício 1 e fazendo as mesmas hipóteses, provar que AE × DC = AD × ME.

12. Pelo vértice A, de um $\triangle$ inscrito ABC, traçam-se a altura AD e o diâmetro AF. Provar que AB × AC = AD × AF.

N. B. Traçar a corda BF e comparar os $\triangle$ ACD e ABF.

13. Voltando à figura do exercício anterior, traçar a corda FC e provar que BD × AC = FC × AD.

14. Demonstrar que as diagonais de um trapezoide (trapézio simétrico) se dividem recìprocamente em segmentos proporcionais.

15. Por um ponto M, tomado no interior de um círculo, traçam-se duas cordas MAB e MCD. Provar que MA × MB = MC × MD.

16. Por um ponto M, tomado no exterior de um círculo, traçam-se duas secantes MAB e MCD. Provar que MA × MB = MC × MD.

17. Demonstrar que o produto dos dois catetos de um △ retângulo é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa à hipotenusa.

18. Os três lados de um △ medem 3,4m, 5,6m e 7,1m. Calcular o perímetro de um △ semelhante ao primeiro, sabendo que a razão de semelhança entre o primeiro e o segundo é 7/20.

19. O perímetro de um losango mede 180m. Calcular o lado de um losango semelhante ao primeiro, sabendo que a razão de semelhança entre o primeiro e o segundo é 0;36.

20. O perímetro de um polígono mede 213,5m. Calcular o perímetro de um polígono semelhante ao primeiro, sabendo que, se um lado AB do primeiro polígono mede 11m, o lado A'B' do segundo mede 40,7m.

21. Os três lados de um △ medem 0,24m, 0,36m e 0,48m. Calcular os lados de um segundo △ semelhante ao primeiro, sabendo que a razão de semelhança entre o primeiro e o segundo é 4 4/9.

22. Em um △ABC, AB = 40m, AC = 44m e BC = 60m. Sôbre AB, a partir de A, toma-se um segmento AD com 23m, e traça-se DE ‖ BC. Calcular os lados do △ADE.

23. O perímetro de um ▱ ABCD mede 42m, sendo AB igual á têrça parte de BC. Calcular os lados A'B' e B'C' de um ▱ semelhante ao primeiro, sabendo que AB está para A'B' assim como 2 está para 5.

24. Os três lados de um terreno triangular medem respectivamente 7,8km, 57,6hm e 483dam. Êste terreno é desenhado na escala de 1 para 20 000. Calcular o comprimento de cada um dos três lados do desenho.

25. Os perímetros de dois △△ semelhantes medem respectivamente 11,7m e 9,1m. O lado AB do maior mede 4,2m. Quando mede o lado A'B' do menor?

26. Um △ equilátero tem 648m de perímetro. Sua altura é igual a 5/12 da altura de um segundo △ equilátero. Calcular o lado do segundo △.

88. Construções geométricas. Problema I. *Dividir um segmento dado, segundo uma razão dada.*

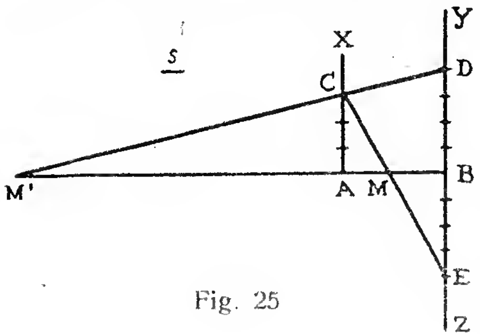


Fig. 25

Seja AB o segmento dado e $\frac{3}{4}$ a razão dada.

Pelos pontos A e B tracemos duas ‖ quaisquer AX e ZY. Em seguida, com um comprimento qualquer s, tomemos AC=$3s$ e BD=BE =$4s$. Depois unamos o ponto C ao ponto E e o ponto D ao ponto C, prolongando

DC até encontrar AB no ponto M'. Os △△ MAC e MBE são semelhantes. (por que?) Logo,

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AC}{BE}. \text{ Mas, } \frac{AC}{BE} = \frac{3s}{4s} = \frac{3}{4} \therefore \frac{MA}{BM} = \frac{3}{4}.$$

Portanto, o ponto M é uma das soluções do problema. Os △△ M'AC e M'BD são semelhantes. (por que?) Então, $\frac{M'A}{M'B} = \frac{AC}{BD}$. Mas, $\frac{AC}{BD} = \frac{3s}{4s} = \frac{3}{4}$. $\therefore \frac{M'A}{M'B} = \frac{3}{4}$. Portanto, o ponto M' é a segunda solução do problema. E o problema tem sòmente duas soluções. (§ 81)

Problema II. *Dividir um segmento retilíneo em um número qualquer de partes iguais.*

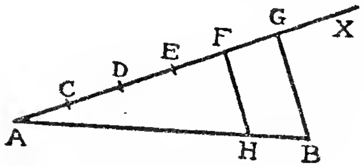


Fig. 26

Seja AB o segmento dado e vamos dividí-lo em cinco partes iguais. Traçamos a semirreta AX, formando com AB um ∠ qualquer BAX. Em AX, a partir do ponto A, marcamos *cinco segmentos iguais* e consecutivos, a saber: AC, CD, DE, EF e FG. O comprimento dêstes segmentos é arbitrário. Ligamos o ponto G ao ponto B e, pelo ponto F, traçamos FH ‖ GB. Sendo FG a quinta parte de AG, por construção, o segmento HB é também a quinta parte do segmento AB. (§ 82)

Problema. III. *Construir a quarta proporcional a três números dados ou a três segmentos dados.*

Sejam 2, 3 e 4 os três números dados. Se quisermos *calcular* a quarta proporcional, teremos 2 : 3 :: 4 : x ∴ x = 6. Vejamos agora como se *constrói* a quarta proporcional aos três números dados. Traça-se um ∠ qualquer XAY. Em seguida, adotando-se uma unidade qualquer de comprimento, marcam-se nos lados do ∠ XAY os segmentos AB = 2 unidades, AC = 3 unidades e BD = 4 unidades. Liga-se o ponto B ao ponto C e pelo

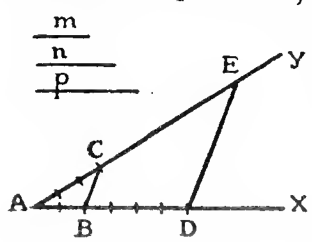


Fig. 27

ponto D traça-se o segmento DE $\parallel$ BC; o segmento CE é a quarta proporcional pedida. Com efeito,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE} \ (\S 82) \ \therefore \ \frac{2}{3} = \frac{4}{CE}$$

O segmento CE é realmente a quarta proporcional aos números 2, 3 e 4.

Observação. Para construir a quarta proporcional a três segmentos dados, *m*, *n* e *p* (fig. 27) a marcha a seguir é evidentemente a mesma.

Observação. Quando as dimensões da fôlha de papel para desenho são pequenas e os números dados são grandes, é necessário modificar a construção indicada neste problema.

Sejam 2, 3 e 6 os três números dados. Traça-se um $\angle$ qualquer XAY. (fig. 27) Depois de escolher o segmento unidade, marcam-se nos lados do $\angle$XAY, os segmentos AB = 2 unidades, AC = 3 unidades e AD = 6 unidades. Traça-se o segmento BC e o segmento DE $\parallel$ BC; o segmento AE é a quarta proporcional pedida. Com efeito,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \ (\S 82) \ \therefore \ \frac{2}{3} = \frac{6}{CE}$$

Problema IV. *Construir a terceira proporcional a dois números dados.*

Proporção contínua é a que tem os meios iguais.

Construir a terceira proporcional aos números 3 e 9, é o mesmo que construir o quarto têrmo da proporção $3 : 9 :: 9 : x$. Portanto, êste problema se resolve como o anterior.

Capítulo VIII

Relações Numéricas no Triângulo

89. Projeções. Chama-se *projeção* de um ponto P sôbre uma reta XY, o pé da $\perp$ à reta XY, traçada pelo ponto P. A projeção do ponto P sôbre a reta XY é o ponto *p*.

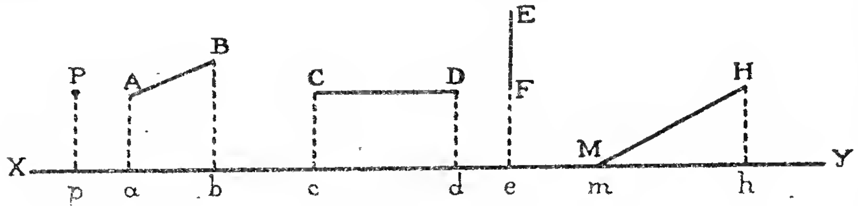


Fig. 28

Para projetar um segmento retilíneo AB sôbre uma reta XY, é bastante projetar as duas extremidades A e B do segmento AB, sôbre o eixo XY. As projeções de AB, CD e MH sôbre XY são, respectivamente, *ab*, *cd* e *mh*. A projeção de EF sôbre XY, sendo EF $\perp$ XY, é evidentemente o ponto *e*. Quanto ao segmento MH, a projeção do ponto M sôbre XY é o próprio ponto M. As $\perp$s *Pp*, *Aa*, *Bb*, *Cc*, etc., são chamadas *projetantes*.

Há diferentes espécies de projeções; mas aqui consideraremos sòmente a *projeção ortogonal* ou simplesmente *projeção*,[1] que é a projeção que acabámos de definir.

Dados três números a, b e c, diz-se que a é a média geométrica de b e c, quando, entre os números a, b e c, existe a relação $\frac{b}{a} = \frac{a}{c}$.

A média geométrica de dois números é igual à raiz quadrada do produto dêles. Com efeito, se a é a média geométrica de b e c, então $\frac{b}{a} = \frac{a}{c} \ \therefore \ a^2 = bc \ \therefore \ a = \sqrt{bc}$.

90. O teorema de Pitágoras. Foi Pitágoras, matemático e filósofo grego que viveu no 6.º século antes da era cristã, quem estabeleceu as relações métricas ou numéricas existentes entre os lados de um △ retângulo. Estas relações podem ser resumidas nos dois teoremas que vamos demonstrar.

Primeiro teorema. *Em um triângulo retângulo, cada cateto é média geométrica entre a sua projeção sôbre a hipotenusa e a hipotenusa toda; a altura relativa à hipotenusa é média geométrica entre os dois segmentos que ela determina na mesma hipotenusa.* **(§ 94, observação final)**

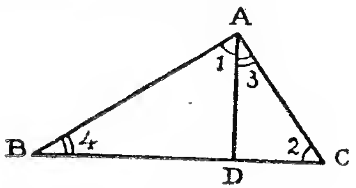


Fig. 29

$$\text{H.} \begin{cases} B\hat{A}C = 1 \angle \text{reto} \\ AD \perp BC \end{cases}$$

$$\text{T.} \begin{cases} \overline{AB}^2 = BD.BC \\ \overline{AC}^2 = CD.BC \\ \overline{AD}^2 = DB.DC \end{cases}$$

Observação. Convém reler a Regra dada no começo da série XLV.

Comparemos os ⨻ ABD e ABC. São retângulos, (hip.); têm um ∠ comum, B; então os terceiros ∡, a saber, $\hat{1}$ e $\hat{2}$ são iguais. Logo, os dois ⨻ são semelhantes. Donde

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} \quad .\cdot. \quad \overline{AB}^2 = BD.BC$$

Comparemos os ⨻ ADC e ABC. São retângulos, (hip.); têm um ∠ comum, C; então os terceiros ∡, a saber $\hat{3}$ e $\hat{4}$, são iguais. Logo, os dois ⨻ são semelhantes. Donde

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CD}{AC} \quad .\cdot. \quad \overline{AC}^2 = CD.BC$$

Comparemos os ⨻ ADB e ADC. São semelhantes porque têm seus ∡ respectivamente iguais. Logo,

$$\frac{AD}{DC} = \frac{DB}{AD} \quad .\cdot. \quad \overline{AD}^2 = DC.DB$$

Segundo teorema. *Se medirmos os três lados de um triângulo retângulo com a mesma unidade, o quadrado do número que mede a hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos números que medem os dois catetos.*

De acôrdo com o primeiro teorema, temos: (fig. 29)

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{AB}^2 = BD.BC \\ \overline{AC}^2 = BC.DC \end{array} \right\} \quad .\cdot. \quad \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BD.BC + BC.DC \quad .\cdot.$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC(BD + DC) \quad .\cdot.$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

C.Q.D.

Corolário. *A diagonal e o lado de um quadrado são grandezas incomensuráveis.*

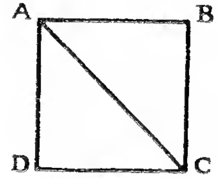


Fig. 30

A figura ABCD é um quadrado. Portanto, o △ ABC é retângulo. Logo,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

Fazendo $AC = d$ e $AB = BC = l$, teremos:

$$d^2 = 2l^2 \quad .\cdot. \quad \frac{d^2}{l^2} = 2 \quad .\cdot. \quad \frac{d}{l} = \sqrt{2} \qquad (1)$$

Se a razão entre a diagonal e o lado de um quadrado é igual a $\sqrt{2}$, êstes dois segmentos são incomensuráveis. (E.M.T.V. § 149)

De (1) deduzimos facilmente que:

$$\boxed{\mathbf{d = l\sqrt{2}} \quad \text{(A)} \qquad \mathbf{l = \frac{d\sqrt{2}}{2}} \quad \text{(B)}}$$

A fórmula (A) significa que *a diagonal de um quadrado é igual ao lado multiplicado pela raiz quadrada de 2.*

E, de acôrdo com a fórmula (B) *o lado de um quadrado é igual à metade da diagonal multiplicada pela raiz quadrada de 2.*

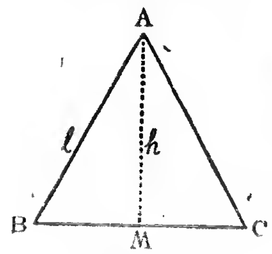


Fig. 31

Corolário. *O lado e a altura de um triângulo equilátero são grandezas incomensuráveis.*

No △ equilátero, as alturas se confundem com as medianas. Portanto, MB = MC.

Façamos $AB = l \quad .\cdot. \quad MB = \dfrac{l}{2}$.

O △ ABM é retângulo; logo,

$$l^2 = h^2 + \frac{l^2}{4} \quad \therefore \quad 4l^2 = 4h^2 + l^2 \quad \therefore \quad 3l^2 = 4h^2 \qquad (2)$$

Dividindo ambos os membros de (2) por $3h^2$ teremos:

$$\frac{3l^2}{3h^2} = \frac{4h^2}{3h^2} \quad \therefore \quad \frac{l^2}{h^2} = \frac{4}{3} \quad \therefore \quad \frac{l}{h} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \therefore \quad \frac{l}{h} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Se a razão entre o lado e a altura de um △ equilátero é igual a dois terços da raiz quadrada de 3, êstes dois segmentos são incomensuráveis.

De (2) deduzimos que:

$$\boxed{l = \frac{2h\sqrt{3}}{3} \quad (C) \qquad h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \quad (D)}$$

A fórmula (C) nos permite calcular o lado de um △ equilátero, quando é dada a altura; a fórmula (D) nos permite resolver o problema contrário.

Relativamente ao △ retângulo damos a seguir algumas curiosidades que transcrevemos de J. Rey Pastor. (*Geometria, Terceiro Curso*, Buenos Aires, 1939) (*)

O △ retângulo mais simples que existe é aquele cujos lados medem 3, 4 e 5 unidades. Êste △, chamado **triângulo egípcio**, já era conhecido há mais de 4 000 anos pelos babilonios e egípcios.

Todo o △ cujos lados medem $3a$, $4a$ e $5a$ é um △ retângulo, porque $(3a)^2 + (4a)^2 = (5a)^2$. Por exemplo, fazendo $a = 6$, teremos 18, 24 e 30, que são os lados de um △ retângulo, como é fácil de verificar.

Mas, há numerosos △ retângulos cujos lados não são dados pelos números $3a$, $4a$ e $5a$.

Os pitagóricos (da escola fundada por Pitágoras, no ano 530 A.C. em Crotone, na atual província da Calábria, Itália, e que então fazia parte da *Magna Grécia*) estabeleceram as fórmulas

$$\boxed{a \qquad \frac{a^2 - 1}{2} \qquad \frac{a^2 + 1}{2}}$$

que servem para formar △ retângulos, atribuindo à letra a **valores ímpares.** Portanto, estas fórmulas não resolvem completamente o problema.

(*) Estas curiosidades foram também publicadas na simpática revista nacional *"Vamos Ler"*, em 19-3-1942, sem que se citasse, porém, a fonte.

Platão; filósofo grego (429 – 348 A. C.) propôs as fórmulas

$$\boxed{2a \qquad a^2 - 1 \qquad a^2 + 1}$$

que também não incluem todos os △ retângulos possíveis.

A solução completa foi dada por Euclides, em seus *Elementos*, com as seguintes fórmulas:

$$\boxed{ab \qquad \frac{a^2 - b^2}{2} \qquad \frac{a^2 + b^2}{2}}$$

Se fizermos $a = 7$ e $b = 3$ resulta o △ retângulo 21, 20, 29, que não nos é dado pelas fórmulas da escola de Pitágoras ou de Platão.

91. Relações numéricas nos triângulos obliquângulos.

Teorema. *Em um triângulo obliquângulo, o quadrado de um lado oposto a um ângulo agudo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o duplo produto de um dêstes dois lados pela projeção do outro sôbre êle.*

No △ ABC, o lado BC opõe-se ao ∠ agudo A. A projeção de AB sôbre AC é AD. Vamos provar que:

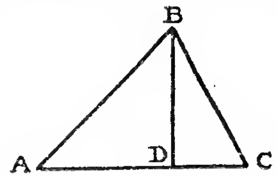


Fig. 32

$$T \; \{ \; \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2AC.AD$$

Consideremos o △ retângulo BDC.

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 \qquad (1)$$

Mas,

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2$$

$$\overline{DC}^2 = (AC - AD)^2 = \overline{AC}^2 - 2AC.AD + \overline{AD}^2$$

Voltando à igualdade (1) e substituindo $\overline{BD}^2$ e $\overline{DC}^2$ pelos dois valores que acabámos de determinar, teremos:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2AC.AD + AD^2 \quad \therefore$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AC.AD \qquad \text{C.Q.D.}$$

Teorema. *Em um triângulo obliquângulo, o quadrado de um lado oposto a um ângulo obtuso é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, mais o duplo produto de um dêstes dois lados pela projeção do outro sôbre êle.*

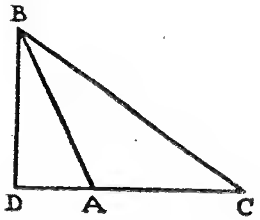


Fig. 33

No $\triangle$ ABC, o lado BC opõe-se ao $\angle$ obtuso A. A projeção de AB sôbre AC é AD. Vamos provar que:

$$\text{T.} \; \{ \; \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + 2AC.AD$$

Consideremos o $\triangle$ retângulo BDC.

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 \qquad (1)$$

$$\text{Mas,} \quad \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2$$

$$\overline{DC}^2 = (AC + AD)^2 = \overline{AC}^2 + 2AC.AD + \overline{AD}^2$$

Voltando à igualdade (1) e substituindo $\overline{BD}^2$ e $\overline{CD}^2$ pelos dois valores que acabámos de determinar, teremos:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 + 2AC.AD + \overline{AD}^2 \;\therefore$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2AC.AD \qquad \text{C.Q.D.}$$

Observação. Dados os três lados de um $\triangle$, é sempre possível, com o auxílio dos três teoremas que acabámos de demonstrar, determinar a natureza dos $\measuredangle$ do mesmo $\triangle$. Sejam A, B e C os três $\measuredangle$ de um $\triangle$ e a, b e c os três lados.

Se $\hat{A} = 90° \;\therefore\; a^2 = b^2 + c^2 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \;\therefore\; a^2 = b^2 + c^2$
Se $\hat{A} < 90° \;\therefore\; a^2 = b^2 + c^2 - 2b \times$ proj. de c sôbre b $\;\therefore\; a^2 < b^2 + c^2$
Se $\hat{A} > 90° \;\therefore\; a^2 = b^2 + c^2 + 2b \times$ proj. de c sôbre b $\;\therefore\; a^2 > b^2 + c^2$

$$\text{Recìprocamente,} \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \;\therefore\; \hat{A} = 90° \\ a^2 < b^2 + c^2 \;\therefore\; \hat{A} < 90° \\ a^2 > b^2 + c^2 \;\therefore\; \hat{A} > 90° \end{cases}$$

Aplicação. Em um $\triangle$ ABC temos $a = 7$, $b = 8$ e $c = 13$. Determinar a natureza dos $\measuredangle$ dêste $\triangle$.

$$a = 7 \;\therefore\; a^2 = 49 \qquad a^2 < b^2 + c^2 \;\therefore\; A < 90°$$
$$b = 8 \;\therefore\; b^2 = 64 \qquad b^2 < a^2 + c^2 \;\therefore\; B < 90°$$
$$c = 13 \;\therefore\; c^2 = 169 \qquad c^2 > a^2 + b^2 \;\therefore\; C > 90°$$

92. Para calcular as medianas de um triângulo.
Teorema. *Em um triângulo qualquer, a soma dos quadrados de dois lados é igual ao dôbro do quadrado da metade do terceiro lado, mais o dôbro do quadrado da mediana relativa ao terceiro lado.*

$$\text{H.} \; \{ \; DB = DC$$

$$\text{T.} \; \{ \; \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{BD}^2 + 2\overline{AD}^2$$

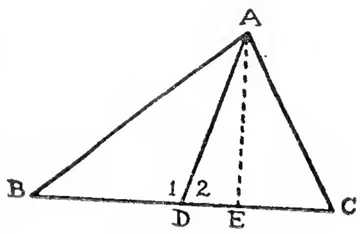


Fig. 34

A mediana AD forma com BC dois $\measuredangle$ adjacentes supls. e em geral, desiguais, isto é, um $\angle$ agudo e um $\angle$ obtuso. Suponhamos que o $\angle$ 1 é obtuso e o $\angle$ 2, agudo. A projeção de AD sôbre BC é DE. Considerando os $\triangle$ ABD e ACD, e aplicando-lhes os dois últimos teoremas demonstrados, teremos:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 + 2BD.DE$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{AD}^2 - 2DC.DE$$

Somando e lembrando que BD = DC, teremos:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{BD}^2 + 2\overline{AD}^2 \qquad \text{C.Q.D.}$$

Representando os três lados de um $\triangle$ por a, b, c e a mediana relativa ao lado a, por m_a, êste teorema nos permite escrever:

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \qquad \text{(A)}$$

Conhecidos os três lados de um $\triangle$, a equação (A) nos permite calcular as três medianas do mesmo $\triangle$.

Teorema de Euler. *A soma dos quadrados dos quatro lados de um quadrilátero é igual à soma dos quadrados das diagonais, mais quatro vêzes o quadrado do segmento que une os pontos médios das diagonais.*

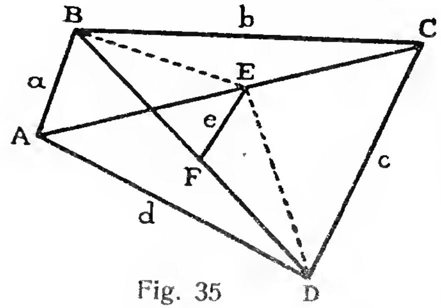


Fig. 35

Façamos AC = r, BD = s e EF = e.

$$\text{H.} \begin{cases} EA = EC \\ FB = FD \end{cases}$$

$$\text{T.} \; \{ \; a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = r^2 + s^2 + 4e^2$$

No △ ABC, o segmento BE é uma mediana. Portanto,

$$a^2 + b^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{BE}^2 \quad \therefore$$

$$a^2 + b^2 = 2 \times \left(\frac{r}{2}\right)^2 + 2\overline{BE}^2 \quad \therefore$$

$$a^2 + b^2 = \frac{2r^2}{4} + 2\overline{BE}^2 \qquad \text{(I)}$$

No △ ADC, o segmento DE é uma mediana. Portanto,

$$c^2 + d^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{DE}^2 \quad \therefore$$

$$c^2 + d^2 = 2 \times \left(\frac{r}{2}\right)^2 + 2\overline{DE}^2 \quad \therefore$$

$$c^2 + d^2 = \frac{2r^2}{4} + 2\overline{DE}^2 \qquad \text{(II)}$$

No △ BED, o segmento EF é uma mediana. Portanto,

$$\overline{BE}^2 + \overline{DE}^2 = 2\overline{BF}^2 + 2\overline{EF}^2 \quad \therefore$$

$$\overline{BE}^2 + \overline{DE}^2 = 2 \times \left(\frac{s}{2}\right)^2 + 2\overline{EF}^2 \quad \therefore$$

$$\overline{BE}^2 + \overline{DE}^2 = \frac{2s^2}{4} + 2e^2$$

E multiplicando ambos os membros desta igualdade por 2,

$$2\overline{BE}^2 + 2\overline{DE}^2 = \frac{4s^2}{4} + 4e^2 \qquad \text{(III)}$$

Somando as igualdades, I, II e III, teremos:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\overline{BE}^2 + 2\overline{DE}^2 =$$

$$\frac{2r^2}{4} + 2\overline{BE}^2 + \frac{2r^2}{4} + 2\overline{DE}^2 + \frac{4s^2}{4} + 4e^2 \quad \therefore$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = r^2 + s^2 + 4e^2 \qquad \text{C.Q.D.}$$

Corolário. *Em um paralelogramo, a soma dos quadrados dos quatro lados é igual à soma dos quadrados das diagonais.* (Ao cuidado dos estudantes; demonstrar com e sem o teorema de Euler.)

93. Fórmula para calcular a altura de um triângulo. Conhecendo os três lados de um △, é sempre possível calcular

as três alturas do mesmo △, com o auxílio dos teoremas anteriores. Entretanto, é útil conhecer a *fórmula* para calcular as alturas de um △ em função dos lados, não sòmente para abreviar os cálculos, mas pelas numerosas e importantes aplicações desta mesma fórmula.

Um △ qualquer ABC (fig. 36) tem, pelo menos, dois $\measuredangle$ agudos. Seja B um dêstes $\measuredangle$ agudos. Designemos por h a altura do △ ABC, relativa ao lado a e vamos calcular esta altura. Se o ∠ B é agudo, teremos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2am \ (\S\,91) \quad \therefore$$

$$2am = a^2 + c^2 - b^2 \quad \therefore$$

$$m = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

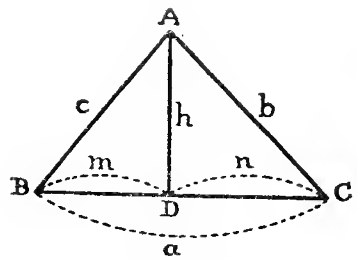


Fig. 36

O △ ABD é retângulo. Logo,

$$h^2 = c^2 - m^2 \quad \therefore$$

$$h^2 = c^2 - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2} \quad \therefore$$

$$h^2 = \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2} \quad \therefore \quad \text{(E.M.T.V. § 56, IV)}$$

$$h^2 = \frac{(2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)}{4a^2}$$

O segundo membro desta igualdade não se altera, multiplicando-o duas vêzes por *menos* 1; portanto,

$$h^2 = \frac{(2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)(-1)(-1)}{4a^2} \quad \therefore$$

$$h^2 = \frac{\left[(2ac + a^2 + c^2) - b^2\right]\left[(a^2 - 2ac + c^2) - b^2\right](-1)}{4a^2} \quad \therefore$$

$$h^2 = \frac{\left[(a+c)^2 - b^2\right]\left[(a-c)^2 - b^2\right](-1)}{4a^2} \quad \therefore$$

$$h^2 = \frac{\left[(a+c)^2 - b^2\right]\left[b^2 - (a-c)^2\right]}{4a^2} \quad \therefore$$

$$h^2 = \frac{(a+b+c)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}{4a^2} \qquad \text{(I)}$$

O trinômio $a+b+c$ é o perímetro do $\triangle$ ABC. Façamos $a+b+c=2p$ e, de ambos os membros desta igualdade vamos subtrair sucessivamente $2a$, $2b$ e $2c$. Teremos:

$$a+b+c-2a = 2p-2a \therefore b+c-a = 2(p-a)$$
$$a+b+c-2b = 2p-2b \therefore a+c-b = 2(p-b)$$
$$a+b+c-2c = 2p-2c \therefore a+b-c = 2(p-c)$$

Voltando à igualdade (I) e substituindo os quatro trinômios do numerador por êstes valores que acabámos de determinar, teremos:

$$h^2 = \frac{2p \times 2(p-a) \times 2(p-b) \times 2(p-c)}{4a^2} \therefore$$

$$h^2 = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2} \therefore$$

$$h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Esta é a fórmula que nos permite calcular a altura do $\triangle$ABC, relativa ao lado a, em função dos lados do mesmo $\triangle$. De um modo análogo obteríamos:

$$\mathbf{h} \text{ (relativa ao lado } \mathbf{b}) = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\mathbf{h} \text{ (relativa ao lado } \mathbf{c}) = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Aplicação. Calcular as três alturas de um $\triangle$, cujos lados a, b e c medem respectivamente 11, 13 e 16 metros.

$$\begin{array}{rcl} a & = & 11 \\ b & = & 13 \\ c & = & 16 \\ \hline 2p & = & 40 \\ p & = & 20 \\ p-a & = & 9 \\ p-b & = & 7 \\ p-c & = & 4 \end{array}$$

$$h_a = \frac{2}{11}\sqrt{20\times9\times7\times4} = \frac{24}{11}\sqrt{35}$$

$$h_b = \frac{2}{13}\sqrt{20\times9\times7\times4} = \frac{24}{13}\sqrt{35}$$

$$h_c = \frac{2}{16}\sqrt{20\times9\times7\times4} = \frac{24}{16}\sqrt{35}$$

94. Para calcular as bissetrizes de um triângulo.
Teorema. *O produto de dois lados de um triângulo é igual ao*

quadrado da bissetriz do ângulo formado por êstes dois lados, mais o produto dos segmentos aditivos que esta bissetriz determina no terceiro lado.

$$\text{H. } \{ \hat{1} = \hat{2} \qquad \text{T. } \{ AB.AC = \overline{AD}^2 + BD.CD$$

Pelos três vértices do $\triangle$ABC façamos passar uma O. Em seguida, prolonguemos a bissetriz AD até encontrar a O no ponto E. Tracemos a corda BE e comparemos os $\triangle$ ABE e ACD.

$$\hat{1} = \hat{2} \quad \text{(hip.)}$$
$$\hat{3} = \hat{4} \quad \text{(E.M.T.V. § 151)}$$
$$\hat{5} = \hat{6} \quad \text{(E.M.T.V. § 112, I)}$$

$\triangle$ ABE $\sim$ $\triangle$ ACD **(1.º caso)**

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC} \therefore AB.AC = AD.AE \therefore$$

$$AB.AC = AD\,(AD + DE) \therefore$$
$$AB.AC = \overline{AD}^2 + AD.DE \qquad \text{(I)}$$

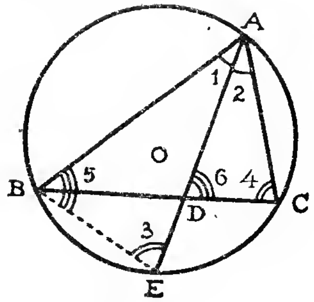


Fig. 37

Para chegar à tese é necessário provar que o produto AD.DE é igual ao produto BD.CD. Para maior clareza, façamos uma nova figura e comparemos os $\triangle$ ADC e BDE. (fig.38)

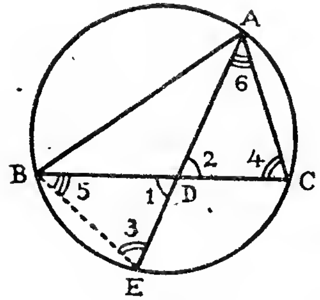


Fig. 38

$$\hat{1} = \hat{2} \quad \text{(o. p. v.)}$$
$$\left.\begin{array}{l}\hat{3} = \hat{4} \\ \hat{5} = \hat{6}\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{E.M.T.V.} \\ \text{§ 151}\end{array}$$

$\triangle$ ADC $\sim$ $\triangle$ BDE **(1.º caso)**

$$\frac{AD}{BD} = \frac{DC}{ED} \therefore AD.ED = BD.DC$$

Voltando à igualdade (I) e nela substituindo AD.DE por BD.DC, teremos:

$$AB.AC = AD^2 + BD.DC \qquad \text{C.Q.D.}$$

Observação. Êste teorema nos permite calcular o comprimento da bissetriz AD, de um $\triangle$ ABC, quando são dados os comprimentos dos três lados do $\triangle$; mas, em primeiro lugar, é necessário calcular os segmentos BD e DC. (§83)

Teorema. *O produto de dois lados de um triângulo é igual ao produto dos segmentos subtrativos que a bissetriz do ângulo externo adjacente ao ângulo formado por aqueles dois lados determina no terceiro lado, menos o quadrado desta mesma bissetriz.*

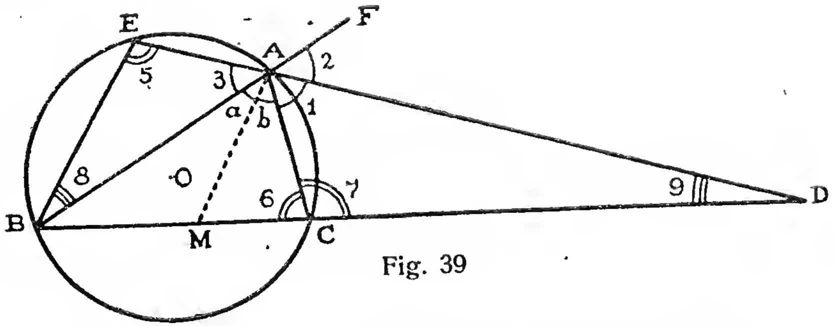


Fig. 39

$$\text{H.}\begin{cases}\text{AD é a bissetriz do } \angle \text{ externo adjacente} \\ \text{ao } \angle \text{A do } \triangle \text{ABC, isto é, } \hat{1} = \hat{2}. \\ \text{AM é a bissetriz do } \angle \text{BAC, isto é, } \hat{a} = \hat{b}.\end{cases}$$

$$\text{T.}\ \{\ \text{AB.AC} = \text{BD.CD} - \overline{\text{AD}}^2$$

Pelos três vértices do △ ABC, é sempre possível fazer passar uma ○. Em seguida, prolonguemos a bissetriz AD até encontrar a ○ no ponto E. Tracemos a corda BE e comparemos os ⊿ ABE e ACD. Os ∠s BAC e CAF, sendo adjacentes e supls., suas bissetrizes AM e AD formam um ∠ reto MAD. Desde que AE é o prolongamento de AD, então o ∠ EAM é também um ∠ reto. Logo, o ∠ 3 é igual ao ∠ 1, porque os ∠s 3 e 1 são respectivamente complementos dos ∠s *a* e *b*. O quadrilátero AEBC sendo inscrito, o ∠ 5 é suplemento do ∠ 6. (E.M.T.V. § 156) Mas, o ∠ 7 é também suplemento do ∠ 6. Então o ∠ 5 é igual ao ∠ 7. Conclue-se então que os ⊿ ABE e ACD têm:

$$\begin{cases}\hat{3} = \hat{1} \\ \hat{5} = \hat{7} \\ \hat{8} = \hat{9}\end{cases} \therefore \begin{cases}\triangle \text{ABE} \sim \triangle \text{ACD (1.º caso)} \\ \dfrac{\text{AB}}{\text{AD}} = \dfrac{\text{AE}}{\text{AC}}\end{cases} \therefore\ \text{AB.AC} = \text{AD.AE}$$

$$\text{AB.AC} = \text{AD(ED} - \text{AD)} \quad \therefore$$

$$\text{AB.AC} = \text{AD.ED} - \overline{\text{AD}}^2 \qquad \text{(I)}$$

Para chegar à tese é necessário provar que o produto AD.ED é igual ao produto BD.CD. Comparemos os ⊿ ADC e BDE.

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases}\hat{9} = \hat{9} \\ \hat{7} = \hat{5}\end{cases} \therefore \\ \text{C}\hat{\text{A}}\text{D} = \text{E}\hat{\text{B}}\text{D} \\ \triangle \text{ADC} \sim \triangle \text{BDE (1.º caso)}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\dfrac{\text{AD}}{\text{BD}} = \dfrac{\text{CD}}{\text{ED}} \therefore \\ \text{AD.ED} = \text{BD.CD}\end{array}$$

Voltando à igualdade (I) e nela substituindo AD.ED por BD.CD, teremos:

$$\text{AB.AC} = \text{BD.CD} - \text{AD}^2 \qquad \text{C.Q.D.}$$

Observação. Êste teorema nos permite calcular o comprimento da bissetriz exterior AD, de um △ ABC, quando são dados os comprimentos dos três lados do △; mas, em primeiro lugar, é necessário calcular os segmentos BD e CD. (§ 83)

Observação. Os enunciados dos teoremas demonstrados neste capítulo são *clássicos*, porém, *incompletos*. O estudante deve completá-los mentalmente, com as seguintes restrições:

a) os segmentos citados em um teorema são *medidos* com a mesma unidade.

b) são os comprimentos resultantes destas medidas que constituem, pròpriamente, a equação contida em cada teorema.

Considerando, por exemplo, o teorema das medianas, deveríamos dizer:

Medindo com a mesma unidade os três lados e as três medianas de um △, a soma dos quadrados dos comprimentos de dois lados é igual ao dôbro do quadrado do comprimento da mediana relativa ao terceiro lado, mais o dôbro do quadrado da metade do comprimento dêste mesmo terceiro lado.

Exercícios. Série XLVI (*)

1. Em um △ retângulo, os catetos *b* e *c* medem respectivamente 2,3m e 3,4m. Calcular a hipotenusa.

2. A hipotenusa de um △ retângulo mede 1,2m e um dos catetos mede 0,8m. Calcular o outro cateto.

3. Uma escada com 8,5m de comprimento é apoiada a uma parede. O pé da escada dista 2,3m da parede. A que altura a escada toca na parede?

4. Calcular os dois catetos de um △ retângulo, sendo a sua soma igual a 24,5m e sendo a hipotenusa igual a 17,5m.

(*) Convém ler a Nota da pág. 271.

5. Calcular os dois catetos de um △ retângulo, sendo a sua diferença igual a 4m e a hipotenusa igual a 18m.
6. Em um △ retângulo, a soma dos catetos é 3,6m e a hipotenusa mede 3m. Calcular os dois catetos.
7. Em um △ retângulo, a diferença dos catetos é de 8m e a hipotenusa mede 25m. Calcular os dois catetos.
8. Em um △ retângulo isósceles, a hipotenusa mede 40m. Calcular os dois catetos.
9. Em um △ retângulo, o cateto AB mede 7m e o cateto AC, 8m. Calcular a projeção de cada cateto sôbre a hipotenusa.
10. Em um △ retângulo, os catetos medem 5m e 6m. Calcular a altura relatíva à hipotenusa.
N. B. Calculando a hipotenusa acharemos $\sqrt{61}$. Não devemos substituir $\sqrt{61}$ pelo seu valor aproximado. O radical $\sqrt{61}$ desaparece no cálculo da altura.
11. Em um △ retângulo, a hipotenusa mede 1,2m e um dos catetos mede 0,8m. Calcular o outro cateto e a altura relativa à hipotenusa.
12. Um cateto de um △ retângulo mede 12m e a altura relativa à hipotenusa, 8m. Calcular o outro cateto e a hipotenusa.
13. Um cateto de um △ retângulo tem 1,3m e sua projeção sobre a hipotenusa, 0,4m. Calcular a altura relativa à hipotenusa. o outro cateto e a hipotenusa.
14. Em um △ retângulo, a altura relativa à hipotenusa determina dois segmentos BD = 4m e CD = 5m. Calcular a altura do △ e os dois catetos.
15. Em um △ retângulo, a diferença entre a hipotenusa e o cateto maior é de 1,4m e a diferença entre a hipotenusa e o cateto menor é de 2m. Calcular a hipotenusa e os dois catetos.
16. Determinar os três lados de um △ retângulo, sabendo que o perímetro mede 22m e que a diferença dos catetos é de 2m.
17. Determinar os três lados de um △ retângulo, sabendo que a soma de seus lados é 84 e que a soma dos quadrados de seus lados é 2 450.
18. Em um △ retângulo, sendo AB e AC os catetos, temos que AB : AC :: 12 : 16. Medindo a hipotenusa 50m, calcular os dois catetos.
19. O lado de um △ equilátero mede 15m. Calcular a altura.
20. A altura de um △ equilátero mede 7m. Calcular o lado.
21. O lado de um △ equilátero mede 1,2m. Calcular a altura, sem recorrer à fórmula.
22. A altura de um △ equilátero mede 12m. Calcular o lado, sem recorrer à fórmula.
23. Calcular o lado e a altura de um △ equilátero, sabendo que a soma destas duas linhas é 50m.
24. O perímetro de um △ isósceles mede 40m e a altura, 12m. Calcular a base, isto é, o lado que não tem igual.
25. O perímetro de um △ isósceles mede 50m e a base, 9m. Calcular a altura relativa ao lado que não tem igual.
26. A base de um △ isósceles mede 1,4m e a altura, 1,8m. Calcular o perímetro.

27. A hipotenusa de um △ retângulo isósceles mede 18m Calcular os catetos e a altura relativa à hipotenusa.
28. Em um △ isósceles, a razão entre um dos lados iguais e a base é 3,2. O perímetro do △ mede 46m. Calcular os três lados do △.
29. Em um △ ABC, a=7m, b=8m e c=10m. Determinar a natureza dos ∡ A, B e C, isto é, verificar se os ∡ do △ são agudos, retos ou obtusos. Em seguida, construir um △ mais ou menos de acôrdo com os dados do problema.
30. Exercício análogo ao anterior sendo a = 12m, b = 16m e c = 20m.
31. Exercício análogo ao anterior, sendo a = 7m, b = 10m e c = 15m.
32. Em um △ ABC, a = 7m, b = 8m e c = 10m. Calcular, sem o auxílio da fórmula, a altura relativa ao lado maior.
N. B. Para resolver êste problema com mais facilidade, é conveniente determinar a natureza dos ∡, desenhar um △ mais ou menos de acôrdo com os dados e tomar como base o lado c.
33. Em um △ ABC, a = 5m, b = 7m e c = 11m. Calcular a altura relativa ao lado b.
34. Em um △ ABC, a = 7,1m, b = 8,2m e c = 10,1m. Calcular as projeções dos lados a e b sôbre o lado c.
35. Em um △ ABC, a = 5m, b = 7m e c = 11m. Calcular as projeções dos lados a e c sôbre o lado b.
36. Em um △ ABC, o lado c mede 7m, o lado b mede 10m e a projeção do lado c sôbre o lado a mede 3,1 m. Calcular o comprimento do lado a. O problema tem duas soluções.
37. A distância entre duas ∥ é de 60m. O segmento AB que as duas ∥ determinam em uma secante, forma com uma das ∥ um ∠ de 45°. Calcular o comprimento do segmento AB.
38. Exercício análogo ao anterior, tendo o ∠, 60°.
39. Exercício análogo ao anterior, tendo o ∠, 30°.
40. O segmento AB de uma reta cortada por duas ∥ mede 12m e forma com uma delas um ∠ de 135°. Calcular a distância entre as duas ∥.
41. Em um △ ABC, a = 3m, b = 4m e c = 6m. Calcular as três alturas com o auxílio da fórmula.
42. Em um △ ABC, a = 7m, b = 10m e c = 12m. Calcular o comprimento da bissetriz do ∠ C.
43. Em um △ ABC, a = 7m, b = 10m e c = 12m. Calcular o comprimento da bissetriz do ∠ externo adjacente ao ∠ C.
44. Os três lados a, b e c, de um △, medem respectivamente 11m, 13m e 16m. Calcular o comprimento da mediana relativa ao lado maior.
45. Em um △ ABC, AB = 20m, AC = 23m e BC = 30m. Traça-se a altura relativa ao lado BC. Na altura AD, a partir de A, toma-se um segmento AM, igual a ⅗ da mesma altura. Pelo ponto M traça-se uma ∥ ao lado BC. Esta ∥ corta os lados AB e AC respectivamente nos pontos E e F. Calcular o comprimento do segmento EF.
46. Dados dois segmentos retilíneos a e b, construir um segmento x que seja igual a $\sqrt{a^2 + b^2}$.
47. O lado de um quadrado mede 37,5m. Calcular a diagonal.
48. A diagonal de um quadrado mede 720m. Calcular o lado.

49. O lado de um quadrado mede 15m. Unem-se os meios dos lados dêste quadrado, formando assim um segundo quadrado cujos vértices são os meios dos lados do quadrado primitivo. Calcular o lado e a diagonal do segundo quadrado.

50. Calcular a diagonal de um quadrado cujo lado é igual à hipotenusa de um △ retângulo cujos catetos medem respectivamente 6m e 7m.

51. Em um quadrado, a soma do lado e da diagonal é 500m. Calcular as duas linhas.

52. Os dois lados consecutivos de um retângulo medem 7,2m e 3,4m. Calcular as diagonais.

53. A diagonal de um retângulo mede 8,5m e a base, 7,1m. Calcular a altura.

54. A base de um retângulo mede 5,2m e a diagonal 6,1m. Calcular a altura.

55. O perímetro de um retângulo mede 320m; a altura é igual a $\frac{5}{8}$ da base. Calcular as diagonais.

56. As dimensões de um retângulo são proporcionais aos números 5 e 6, e a diagonal mede 45m. Calcular as duas dimensões.

57. A razão de dois lados consecutivos de um retângulo é igual a 0,2. A diagonal mede 11m. Calcular a base a a altura do retângulo.

58. As dimensões de um retângulo são $3x$ e $7x$. Calculá-las, sabendo que a diagonal mede 12m.

59. Dois lados consecutivos de um ▱ medem respectivamente 4m e 5m. Uma das diagonais mede 8m. Calcular a outra diagonal.

60. As duas diagonais de um ▱ medem respectivamente 5m e 6m. Um dos lados mede 3m. Calcular o perímetro do ▱.

61. Os dois lados consecutivos de um ▱ formam um ∠ de 60° e medem respectivamente 20m e 12m. Calcular a altura do ▱, tomando por base o lado de 20m.

62. Um dos lados menores de um ▱ mede 15m, a altura relativa ao lado maior mede 12m e a diagonal menor, 20m. Calcular o lado maior e a diagonal maior do ▱.

63. Em um retângulo ABCD, a base AB mede 8m e a altura AD, 6m. Em um segundo retângulo semelhante ao primeiro, a diagonal mede 50m. Calcular as duas dimensões do segundo.

64. Os dois lados consecutivos de um ▱ medem respectivamente 11m e 18m, e a diagonal menor mede 15m. Calcular a altura relativa ao lado de 18m.

65. Os dois lados consecutivos de um ▱ medem respectivamente 21m e 30m, e a diagonal maior, 40m. Calcular a altura relativa ao lado de 30m.

66. Calcular os dois lados consecutivos de um ▱ cujo perímetro mede 60m, sabendo que as duas diagonais medem respectivamente 20m e 30m.

67. O perímetro de um losango mede 68m. Uma das diagonais mede 30m. Calcular a outra.

68. Calcular o perímetro de um losango no qual a diagonal maior mede 2,4m e a menor é igual ao lado.

69. As diagonais de um losango medem 15m e 20m. Calcular o perímetro do losango

70. As diagonais de um losango estão entre si como 3 está para 5, e o perímetro do losango mede 4,8m. Calcular as diagonais.

71. Em um trapézio retângulo, a base maior mede 8,5m, a base menor mede 6,2m e o lado oblíquo mede 3,1m. Calcular a base média do trapézio e a altura.

72. Em um trapézio escaleno, as bases medem 9m e 6m. Os lados não ‖ medem 4m e 3m. Calcular a base média e a altura.

73. Em um trapézio retângulo, as bases medem 1,8m e 1,2m e a altura, 0,6m. Calcular o lado oblíquo.

74. Em um trapézio ABCD, a base AB mede 14m e a base CD, 9m. A altura do trapézio é de 5m. Prolongam-se os lados AD e BC até se encontrarem num ponto E. Calcular a altura do △ABE.

75. As bases de um trapézio medem 15,8m e 11,7m. Calcular os três segmentos que as duas diagonais determinam na base média.

76. Sôbre o lado maior CD de um retângulo ABCD, constrói-se um △ retângulo DCE, formando-se assim um trapézio ABED cujas bases são AD e BE. Sendo AD = 12m, AC = 15m e DE = 15m, calcular a base média do trapézio e suas diagonais. O ponto E fica situado no prolongamento de BC.

77. Em um trapézio escaleno ABCD, a base menor CD (a de cima) mede 7m; os lados não ‖, AD (à esquerda) e BC (à direita), medem respectivamente 5m e 8m. A projeção AM, de AD sôbre AB, mede 2m. Calcular as diagonais do trapézio.

N. B. Calcular primeiramente a altura DM; conhecendo a altura DM ou CN, calcular BN, etc..

78. Os quatro lados de um quadrilátero medem respectivamente 7, 9, 11 e 13 metros. As duas diagonais medem 12 e 15 metros. Calcular o segmento que une os meios das diagonais.

Capítulo IX

Relações Numéricas no Círculo

95. Cordas e diâmetros. Teorema. *Uma corda é média geométrica entre sua projeção sôbre o diâmetro que passa por uma das suas extremidades e o diâmetro todo.*

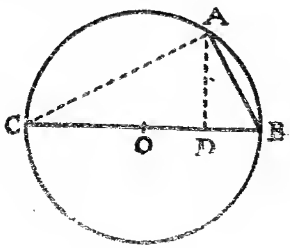


Fig. 40

T. $\{ \overline{AB}^2 = BD.BC$

Une-se o ponto A ao ponto C. O ∠ CAB é reto (por que?); logo, o △ ABC é retângulo, e o cateto AB é média geométrica entre sua projeção BD sôbre a hipotenusa BC, e a hipotenusa toda. (§ 90)

Teorema. *Se, por um ponto qualquer de uma circunferência, baixarmos uma perpendicular sôbre um diâmetro, esta perpendicular é média geométrica entre os dois segmentos que ela determina no diâmetro.*

Na ○ de centro O, tracemos o diâmetro BC e, pelo ponto A, tracemos AD ⊥ BC. Unamos o ponto A aos pontos B e C. Trata-se de provar que $\overline{AD}^2 = BD.DC$. O △ ABC é retângulo; portanto, a altura relativa à hipotenusa é média geométrica entre os dois segmentos que ela determina na hipotenusa. (§ 90)

96. O raio de um círculo circunscrito a um triângulo. Teorema. *O produto de dois lados de um triângulo é igual ao produto da altura relativa ao terceiro lado, pelo diâmetro do círculo circunscrito ao mesmo triângulo.*

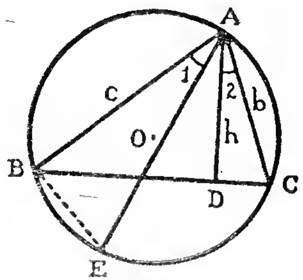


Fig. 41

Seja o △ ABC, inscrito na ○ de centro O. Tracemos a altura AD e o

diâmetro AE. Temos de provar que AB.AC = AD.AE ou $bc = h_a \times 2R$.

A letra R designa o raio do círculo circunscrito ao △ ABC. Tracemos a corda BE e comparemos os △△ ABE e ADC.

$\widehat{ABE} = \widehat{ADC}$ (por que?)
$\hat{E} = \hat{C}$ (por que?)
$\hat{1} = \hat{2}$ (por que?)
△ ABE ∼ △ ADC (1.° caso)

$\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AB}{AD}$ ∴ AB.AC = AD.AE ∴

$bc = h_a \times 2R$ C.Q.D.

Problema. *Conhecendo os três lados de um △ ABC, calcular o raio do círculo circunscrito.*

Sejam a, b e c os três lados do △, e R o raio do círculo circunscrito. Acabámos de provar que

$$bc = h_a \times 2R \qquad \text{(I)}$$

Mas, $$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Substituindo em (I), teremos:

$$bc = \frac{4R\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a} \quad \therefore$$

$$abc = 4R\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \therefore$$

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

97. Potência de um ponto em relação a um círculo. Teorema. *Se, por um ponto tomado no interior de uma circunferência, traçarmos uma corda qualquer, o produto dos dois segmentos desta corda é constante.*

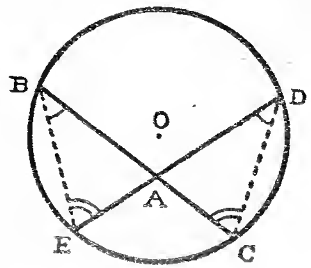


Fig. 42

Na ○ de centro O (fig. 42) e por um ponto interior qualquer A, tracemos uma corda qualquer BAC. Trata-se de provar que o produto AB.AC é constante, seja qual for a posição da corda BAC. Ora, se traçarmos pelo ponto A, outra corda qualquer DAE, e provarmos

que AB.AC = AD.AE, o teorema estará demonstrado. Tracemos as cordas BE e CD e comparemos os △ ABE e ADC. Os ∡ B e D são iguais porque têm por medida a metade do arco EC; os ∡ E e C são iguais porque têm por medida a metade do arco BD; portanto, os dois △ são semelhantes e teremos:

$$\text{(I)}\quad \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC} \quad \therefore \quad AB.AC = AD.AE \qquad \text{C.Q.D.}$$

Observando a igualdade (I), podemos enunciar o teorema que acabámos de demonstrar, com as seguintes palavras: *duas cordas quaisquer se cortam em partes inversamente proporcionais.*

Teorema. *Se, por um ponto tomado no exterior de uma circunferência, traçarmos uma secante qualquer, o produto das distâncias dêste ponto aos pontos de intersecção da secante com a circunferência, é constante.*

Na ○ de centro O e por um ponto exterior qualquer A, tracemos uma secante qualquer ABC. Trata-se de provar que o produto AB.AC é constante, seja qual for a posição da secante ABC. Ora, se traçarmos pelo ponto A, outra secante qualquer ADE e provarmos que AB.AC = AD.AE, o teorema estará demonstrado. Tracemos as cordas BE e CD e comparemos os △ ACD e ABE. Os ∡ C e E são iguais, porque têm por medida a metade do arco BD; o ∠ A é comum; logo, os terceiros ∡ ABE e ADC são iguais, os dois △ são semelhantes e teremos:

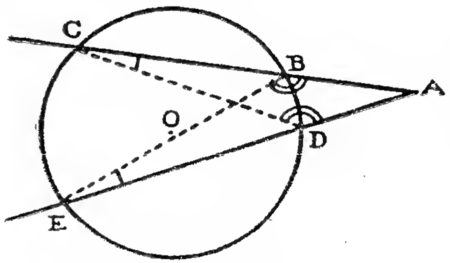


Fig. 43

$$\text{(II)}\quad \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC} \quad \therefore \quad AB.AC = AD.AE \qquad \text{C.Q.D.}$$

Observando a igualdade (II) podemos enunciar o teorema que acabámos de demonstrar, com as seguintes palavras: *duas secantes traçadas por um mesmo ponto exterior à ○, são inversamente proporcionais aos seus segmentos exteriores.*

Teorema. *Se, por um ponto exterior a uma circunferência, traçarmos uma tangente e uma secante, a tangente é média geométrica entre o segmento exterior da secante e a secante inteira.*

H. $\begin{cases} \text{AB é tangente.} \\ \text{ACD é secante.} \end{cases}$

T. $\{ \overline{AB}^2 = AC.AD$

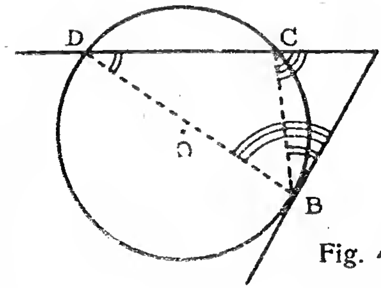


Fig. 44

Unamos o ponto B aos pontos C e D e comparemos os △ ABC e ABD. O ∠ A é comum aos dois △; o ∠ D e o ∠ ABC são iguais, porque têm por medida a metade do arco BC; (E.M.T.V. §§ 151 e 153) portanto, os terceiros ∡ são iguais, os dois △ são semelhantes e teremos:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB} \quad \therefore \quad \overline{AB}^2 = AD.AC \qquad \text{C.Q.D.}$$

Chama-se **potência** *de um ponto em relação a uma ○, o produto das duas distâncias dêste ponto à ○, distâncias estas contadas numa secante qualquer traçada pelo ponto dado.* A potência do ponto P, em relação à ○ de centro O, é PA.PB; a do ponto P′ é P′A.P′B. Como vimos nos teoremas anteriores, a potência de um ponto dado em relação a uma ○ dada, é uma quantidade constante.

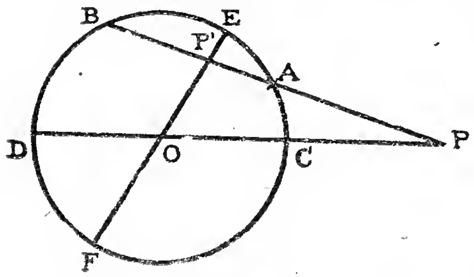


Fig. 45

Teorema. *A potência de um ponto* **P,** *situado a uma distância dada* **d,** *do centro de uma circunferência de raio dado* **r,** *é igual, em valor absoluto, a* $\mathbf{d^2 - r^2}$.

Se o ponto P é exterior à ○, teremos (fig. 45):

$$PA.PB = PC.PD = (d-r)(d+r) = d^2 - r^2$$

Se o ponto P′ é interior à ○, teremos:

$$P'A.P'B = P'E.P'F = (r-d)(r+d) = r^2 - d^2 \quad \therefore$$
$$P'A.P'B = -(d^2 - r^2)$$

Quando P é exterior, a potência é positiva; quando P é interior, a potência é negativa; quando P é *aferente* (sôbre a ○),

a potência é nula. Sendo P exterior, os segmentos PA e PB estão dirigidos no mesmo sentido e seu produto é positivo; sendo P interior, os segmentos PA e PB estão dirigidos em sentidos contrários e seu produto é negativo; sendo P *aferente* à O, um dos segmentos PA ou PB é nulo e seu produto é nulo.

98. Construções geométricas. *Medir* uma superfície plana limitada é compará-la com outra superfície plana limitada, e tomada como *unidade*. O resultado desta comparação é um número que se denomina *área* da superfície dada. Portanto, as palavras *área* e *superfície* significam coisas diferentes.

A unidade de área é, em geral, o *metro quadrado*, isto é, um quadrado cujo lado mede um metro. Nem sempre duas superfícies planas limitadas podem coincidir; entretanto, podem ter a mesma *área;* neste caso não são *iguais*, mas *eqüivalentes*.

A figura ABCD é um retângulo e a figura MNRS é um quadrado. Para calcular a área de um quadrado, é bastante medir o comprimento de um de seus lados, por exemplo MN e, em seguida, calcular a segunda potência do número que mede MN; para calcular a área de um retângulo, é bastante medir dois lados consecutivos, por exemplo, AB e BC e, em seguida, multiplicar os dois números que medem respectivamente AB e BC. Assim, se o lado do quadrado MNRS mede 6m, a área dêste quadrado é $36m^2$; se os lados AB e BC do retângulo ABCD medem, respectivamente, 9m e 4m, a área dêste retângulo é $36m^2$. E as figuras ABCD e MNRS que, não sendo iguais têm, entretanto, a mesma área, são chamadas *eqüivalentes*.

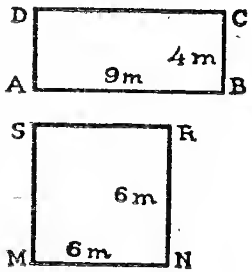


Fig. 46

A *segunda potência* de um número é também chamada *quadrado* dêste número, porque ela representa a área de um quadrado cujo lado é medido por êste número. O *produto* de dois números pode ser denominado o *retângulo* dêstes números, porque êle representa a área de um retângulo no qual dois lados consecutivos são medidos pelos dois fatores do produto. Então a segunda potência de 6 pode ser representada gràficamente pelo quadrado MNRS, cujo lado mede 6; o produto 9×4 pode ser representado

pelo retângulo ABCD, cujos lados AB e BC medem respectivamente 9 e 4.

E' sempre possível transformar um retângulo em um quadrado eqüivalente. Sejam AB e BC (fig.47) os dois lados consecutivos de um retângulo. Traçamos um segmento AC=AB+BC. Sôbre AC como diâmetro, traçamos uma O. Pelo ponto B traçamos BD ⊥ AC. O lado do quadrado eqüivalente ao retângulo dado é BD. Para prová-lo, tracemos as cordas DA e DC. O △ ACD é retângulo; logo $\overline{BD}^2 = AB.BC$. (§95)

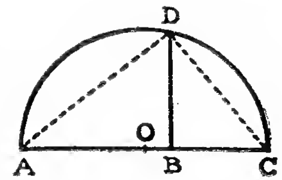


Fig. 47

Todas estas considerações foram necessárias com o fim de chegar à seguinte conclusão: para reprcsentar gràficamente o produto de dois segmentos, não é necessário traçar o retângulo correspondente, nem o quadrado eqüivalente a êste retângulo; é bastante traçar o lado do quadrado.

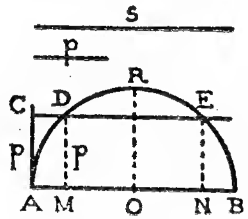


Fig. 48

Primeiro problema. *Construir dois segmentos, conhecendo sua soma e seu produto.*

Seja s a soma dos dois segmentos pedidos e p o segmento cujo quadrado representa o produto dos mesmos segmentos. Tomando AB como diâmetro, traçamos uma O; por A traçamos AC igual a p e ⊥ AB. Por C traçamos CE ∥ a AB. Esta ∥ corta a O nos pontos D e E. Pelo ponto D traçamos DM ⊥ AB. Os dois segmentos pedidos são MA e MB. Com efeito, $MA + MB = AB = s$ e $MA.MB = \overline{MD}^2 = p^2$. (§95) Se traçarmos EN ⊥ AB, teremos as soluções NA e NB que, na realidade, são iguais às soluções MA e MB, como é fácil demonstrar.

Quando $p = \frac{s}{2}$, a ∥ CE é tangente à O no ponto R, a ⊥ DM toma a posição OR e os dois segmentos pedidos serão OA e OB, isto é, as duas metades de s.

Quando $p > \frac{s}{2}$, o problema não tem solução.

Segundo problema. *Construir dois segmentos, conhecendo a sua diferença e o seu produto.*

Seja d a diferença dos dois segmentos pedidos e p o segmento cujo quadrado representa o produto dos mesmos segmentos. Sôbre $AB = d$, como diâmetro (fig. 49), traçamos uma O. Por A traçamos $AC = p$ e $\perp$ AB. Por C traçamos a secante CDE. Os dois segmentos pedidos são CD e CE. Com efeito, $CE - CD = DE = AB = d$ e $CD.CE = \overline{AC}^2 = p^2$ (§97. 3.º teorema) Êste problema sempre tem solução.

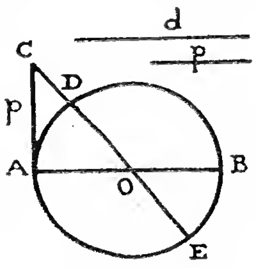


Fig. 49

Terceiro problema. *Construir a média geométrica de dois segmentos dados ou de dois números dados.*

Sejam m e n os dois segmentos dados. (fig.50) Sôbre uma reta tomamos $AC = m$ e $BC = n$. Sôbre AB como diâmetro, traçamos uma O e, em seguida, CD $\perp$ AB. A média geométrica dos segmentos dados **m** e **n** é CD. Com efeito, $\overline{CD}^2 = AC . BC$ §95) $\therefore$ $\overline{CD}^2 = mn$.

A média aritmética dos segmentos m e n é $\dfrac{AB}{2} = OE = OD$. Ora, $CD < OD$. (por que?) Demonstra-se assim gràficamente que a média geométrica de dois números é menor do que a média aritmética dos mesmos dois números.

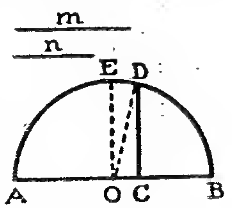


Fig. 50

Às vêzes, na construção da média geométrica de dois segmentos, não é possível colocá-los um em continuação ao outro. Traçamos então um segmento $AB = m$. (fig.51) Neste segmento, e a partir de B, tomamos um segmento $BC = n$. Sôbre AB como diâmetro, traçamos uma O. Pelo ponto C traçamos DC $\perp$ AB. Finalmente traçamos a corda BD. A média geométrica dos segmentos dados **m** e **n** é BD. Com efeito, $\overline{BD}^2 = AB.BC$ (§95) $\therefore$ $\overline{BD}^2 = mn$.

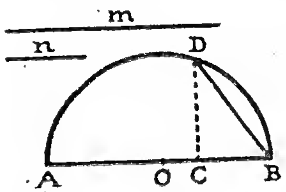


Fig. 51

99. Representação gráfica dos números irracionais. Não é possível obter o valor exato dos radicais $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$. $\sqrt{7}$, etc.. Entretanto, é possível a sua representação gráfica.

Seja AB (fig. 51) um segmento que representa, *por convenção*, o número *um*. Tracemos o $\triangle$ retângulo ABC, sendo $BC = AB$. Aplicando a êste $\triangle$ o teorema de Pitágoras, teremos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \;\therefore$$
$$\overline{AC}^2 = 1 + 1 \;\therefore$$
$$AC = \sqrt{2}.$$

Portanto, o segmento AC representa o radical $\sqrt{2}$.

Considerando o $\triangle$ retângulo ACD, no qual $CD = AB$, teremos:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 \;\therefore$$
$$\overline{AD}^2 = (\sqrt{2})^2 + 1 \;\therefore$$
$$\overline{AD}^2 = \sqrt{3}.$$

O segmento AD representa, pois, o radical $\sqrt{3}$.

E assim por diante.

Se o desenho for bem feito, verificar-se-á que $AE = 2AB$ e $AJ = 3AB$.

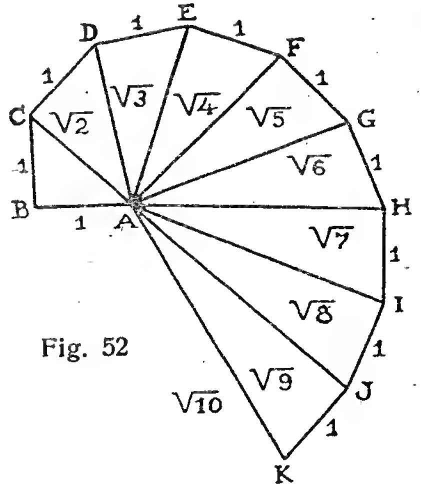


Fig. 52

100. A divisão áurea de um segmento retilíneo. Dividir um segmento dado em média e extrema razão é dividí-lo em dois segmentos tais que o maior seja média geométrica entre o menor e o segmento todo. Êste problema é também conhecido pelo nome de *divisão áurea de um segmento retilíneo.*

Dividiremos a resolução dêste problema em três partes.

Fig. 53

Primeira parte. *Resolução algébrica do problema.*

Seja AB o segmento dado. Suponhamos o problema resolvido e seja X o ponto que divide o segmento AB em média e extrema

razão. Façamos AB = d, XA = x e XB = $d - x$. De acôrdo com o enunciado do problema, teremos:

$$\frac{d-x}{x} = \frac{x}{d}$$
$$x^2 = d^2 - dx$$
$$x^2 + dx - d^2 = 0$$
$$x = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + d^2}$$
$$x = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{5d^2}{4}}$$

$$x = -\frac{d}{2} \pm \frac{d}{2}\sqrt{5}$$
$$x = \frac{d}{2}\left(-1 \pm \sqrt{5}\right)$$
$$x' = \frac{d}{2}\left(-1 + \sqrt{5}\right)$$
$$x'' = \frac{d}{2}\left(-1 - \sqrt{5}\right)$$

Sendo $\sqrt{5} = 2{,}236\ldots\ldots$, teremos:

$$x' = \frac{d}{2}\times(+1{,}236\ldots)$$
$$x'' = \frac{d}{2}\times(-3{,}236\ldots)$$

Obtivemos para x dois valores irracionais, mas que podem ser calculados com a aproximação que se quiser.

O primeiro valor de x nos mostra que existe um ponto X, situado entre A e B, que resolve o problema. Para localizar êste ponto, tomamos em AB, a partir do ponto A, um segmento AX igual a $\frac{d}{2}\times 1{,}236\ldots$ Sendo AX $= \frac{d}{2}\times 1{,}236\ldots.$ resulta que AX $> \frac{d}{2}$. Eis por que, ao iniciar a resolução dêste problema, colocámos o ponto X, mais proximo de B do que de A.

O segundo valor de x nos mostra que existe um ponto X', situado à esquerda de A, no prolongamento do segmento AB, (§ 80) que também resolve o problema. Para localizar êste segundo ponto, tomamos no prolongamento de AB, a partir do ponto A, e para a esquerda, um segmento AX' igual a $\frac{d}{2}\times 3{,}326\ldots$ Sendo AX' $= \frac{d}{2}\times 3{,}326\ldots$ resulta que AX' $> d$, porém AX' $< 2d$.

Entretanto, a construção rigorosa dos pontos X e X' é a que vamos dar na terceira parte.

Segunda parte. *Preparação para a resolução gráfica do problema.* Já sabemos que o problema tem duas soluções: os

pontos X e X'. Para resolver gràficamente o problema, temos de demonstrar a seguinte

T. $\begin{cases} X'A - XA = AB \\ X'A \,.\, XA = \overline{AB}^2 \end{cases}$

Desde que os pontos X e X' dividem o segmento AB em média e extrema razão, teremos:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{XB}{XA} = \dfrac{XA}{AB} & \text{(I)} \\[2ex] \dfrac{X'B}{X'A} = \dfrac{X'A}{AB} & \text{(II)} \end{array}\right\} \therefore \begin{array}{l} \overline{X'A}^2 = AB \,.\, X'B \\ \overline{XA}^2 = AB \,.\, XB \\ \overline{X'A}^2 - \overline{XA}^2 = AB \,.\, X'B - AB \,.\, XB \quad \therefore \end{array}$$

$$(X'A + XA)(X'A - XA) = AB(X'B - XB) \quad \therefore$$
$$XX'(X'A - XA) = AB \,.\, XX' \quad \therefore$$
$$X'A - XA = AB \qquad \text{(III)}$$

Portanto, a primeira parte da nossa tese está demonstrada. Para demonstrar a segunda parte, entremos na igualdade (II) com o valor de X'A tirado da igualdade (III), eliminando sòmente um dos meios. Teremos:

$$\frac{X'B}{XA + AB} = \frac{X'A}{AB} \quad \therefore$$
$$XA\,X'A + X'A \,.\, AB = AB \,.\, X'B$$

$$XA \,.\, X'A = AB \,.\, X'B - AB \,.\, X'A \;\therefore$$
$$XA \,.\, X'A = AB(X'B - X'A) \quad \therefore$$
$$XA \,.\, X'A = \overline{AB}^2$$

Terceira parte. *Resolução gráfica do problema.* Vamos dividir gràficamente o segmento AB, em média e extrema razão, localizando os pontos X e X'. Desde que

$$X'A - XA = AB$$
$$XA \,.\, X'A = \overline{AB}^2$$

conclue-se que, construir ou determinar gràficamente os segmentos XA e X'A é construir dois segmentos dos quais se conhece a diferença e o produto. (§ 98)

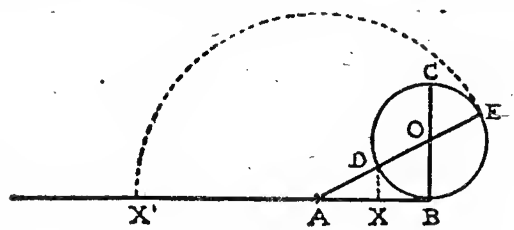


Fig. 54

Traçamos por B, o segmento BC ⊥ à AB e igual à AB. Com centro em O, ponto médio de BC, traçamos a O de raio OB.

Traçamos a secante AE, passando pelo centro da ○. Em seguida, tomamos AX = AD e AX′ = AE. E teremos obtido os pontos X e X′. Com efeito,

$$X'A - XA = AE - AD = DE = BC = AB$$

$$X'A . XA = AE . AD = \overline{AB}^2 \quad (\S 97,\ 3.^o \text{ teorema})$$

Exercícios. Série XLVII

1. Em uma ○ com 6m de raio, traça-se uma corda com 2,5m. Calcular a projeção desta corda sôbre o diâmetro que passa por uma das suas extremidades.

2. A projeção de uma corda sobre o diâmetro que passa por uma das suas extremidades, é igual a 4,1m. Sendo o raio da ○ igual a 8m, calcular o comprimento da corda.

3. A projeção de uma corda sôbre o diâmetro que passa por uma das suas extremidades é igual a 2,2m. Sendo a corda igual a 8m, pede-se o raio da ○.

4. Por um ponto tomado em uma ○, traça-se uma ⊥ a um diâmetro. Esta ⊥ mede 3,5m e um dos segmentos que ela determina sôbre o diâmetro mede 10m. Calcular o raio da ○.

5. Por um ponto tomado em uma ○, traça-se uma ⊥ a um diâmetro. Esta ⊥ determina no diâmetro dois segmentos cujos comprimentos respectivos são 11,5m e 3,2m. Calcular o comprimento da ⊥. Quanto mede o raio da ○?

6. O raio de uma ○ tem 22m. Traça-se uma corda com 14,1m. Calcular a distância do centro à corda.

7. Em uma ○ cujo raio mede 15m, traça-se uma corda cuja distância ao centro é de 7,2m. Calcular o comprimento da corda.

8. Uma corda mede 7,2m. Sua distância ao centro é de 5,1m. Calcular o raio da ○.

9. São dadas duas Ⓢ secantes cujos raios medem respectivamente 2,8m e 2,5m. A linha dos centros mede 3,1m. Calcular o comprimento da corda comum às duas Ⓢ.

10. São dadas duas Ⓢ secantes cujos raios medem respectivamente 6,2m e 3,3m. A corda comum às duas Ⓢ mede 2,4m. Calcular a linha dos centros.

11. São dadas duas Ⓢ secantes. A corda comum mede 12m, dista 7,2m de um dos centros e 4,2m do outro. Calcular os raios das duas Ⓢ.

12. Em uma ○ cujo raio mede 12m, toma-se um ponto A, situado a 5,6m do centro. Pelo ponto A traçam-se as cordas BAC e DAE. Calcular as duas cordas, sabendo que a corda BAC é a menor possível e a corda DAE é a maior possível.

13. Uma corda mede 20m. Sua distância ao centro é de 12m. Calcular a projeção da corda sôbre o diâmetro que passa por uma das suas extremidades.

14. Uma corda tem 16m. Sua distância ao centro é de 25m. Traça-se um diâmetro ⊥ à corda. Calcular os dois segmentos que a corda determina no diâmetro

15. Calcular a flecha de uma corda com 16m, numa ○ cujo raio mede 26m.

16. Em uma ○ com 45m de raio, traça-se uma corda cuja flecha tem 1,4m. Pede-se o comprimento da corda.

17. Uma corda tem 32m e a flecha, 4,4m. Calcular o raio da ○.

18. O raio OA de uma ○ mede 20m. A corda AB mede 7m. Calcular a corda BD do arco duplo BAD.

N. B. Traçar a figura; calcular a projeção AC, da corda AB sôbre o diâmetro AOE, (§ 95, 1.º teorema); calcular em seguida BC, etc..

19. Em uma ○ com 20m de raio, traça-se um diâmetro AB, horizontal. Traça-se uma corda AC, acima de AB, com 8m; traçam-se duas cordas BD (acima de AB) e BE (abaixo de AB) cada uma também com 8m. Calcular a corda CD; provar que a corda CE é um diâmetro.

20. Em uma ○ cujo raio mede 15m, inscreve-se um trapézio cuja base maior é o dôbro da base menor, e passa pelo centro da ○. Demonstrar que o trapézio é isósceles; calcular o comprimento dos lados não ∥ e a altura do trapézio.

21. Por um ponto M, situado no interior de uma ○, traçam-se duas cordas AMB e CMD. Os segmentos MA e MB medem respectivamente 5m e 7m. Calcular os segmentos MC e MD da corda CMD cujo comprimento total é de 14m.

22. Por um ponto M, exterior a uma ○, traçam-se duas secantes MAB e MCD. Sendo MA = 12,5m, MB = 23m e MCD = 42m, calcular MC.

23. Por um ponto M, situado no exterior de uma ○, traçam-se duas secantes MAB e MCD. MA, segmento externo da primeira secante, mede 2,1m; AB, segmento interno da primeira secante, mede 8,3m. Calcular o segmento externo e o segmento interno da secante MCD, cujo comprimento total é de 11m.

24. Por um ponto M, situado no interior de uma ○, traçam-se duas cordas. O produto dos dois segmentos de cada uma destas cordas é igual a 15,7m². O raio da ○ tem 5,1m. Calcular a distância do ponto M ao centro da ○.

25. Em uma ○ com 12m de raio, traça-se uma corda AB que passa por um ponto M, situado no interior da ○. Sendo MA = 3m e MB = 5m, calcular a distância do centro da ○ à corda AB.

26. Por um ponto A, situado em uma ○, traçam-se duas cordas AB e AC, formando um ∠ de 90°. Sendo AB = 2,1m e AC = 3,2m, calcular o raio da ○.

27. Calcular as dimensões de um retângulo inscrito em uma ○ com um raio de 8m. sabendo que o perímetro do retângulo mede 40m.

28. Calcular as dimensões de um retângulo inscrito em uma ○ com 3m de raio, sabendo que a diferença entre as duas dimensões é igual a 2m.

29. Por um ponto situado a 26m de uma ○, traça-se uma tangente cujo comprimento é de 30m. Calcular o raio da ○.

N. B. Entre um ponto e uma ○ ha duas distâncias; a menor e a maior. Nós démos a menor.

30. O raio de uma O mede 4m. Sendo OA êste raio, prolonga-se OA, de um cêrto comprimento AB, e pelo ponto B traça-se BC tangente à mesma O. Sendo BC = 11m, pede-se o comprimento de AB.

31. Por um ponto situado fora de uma O, traçam-se uma tangente e uma secante. A tangente tem 5,2m e a secante, 11,4m. Calcular o segmento externo da secante.

32. Por um ponto situado fora de uma O, traçam-se uma tangente e uma secante. A tangente tem 6,5m e a secante 10,2m. Calcular o segmento interno da secante.

33. Por um ponto situado fora de uma O, traçam-se uma tangente e uma secante. A tangente tem 4m e o segmento externo da secante 3,5m. Calcular o segmento interno da secante.

34. O diâmetro de uma O mede 7,4m. Prolonga-se êste diâmetro de uma certa quantidade BC, com 11,2m, e pelo ponto C traça-se uma tangente à mesma O. Calcular o comprimento desta tangente.

35. E' dada uma O cujo raio OA mede 4,2m. Prolonga-se OA de uma certa quantidade AB. Traça-se por B uma tangente BC cujo comprimento é igual a $\frac{3}{5}$ de AB. Calcular o comprimento da tangente.

36. O raio de uma O tem 2m. Por um ponto A traça-se uma secante cujo segmento interno tem 3m e cujo segmento externo tem 5m. Calcular a distância do ponto A ao centro da O.

37. No plano de uma O cujo raio tem 2,5m, toma-se um ponto A, cuja distância ao centro é 12m. Pelo ponto A traça-se uma secante cujo segmento externo mede 10m. Calcular o segmento interno da secante.

38. O raio de uma O mede 20m. Por um ponto A da O traça-se uma tangente. Por um ponto B da tangente traça-se uma secante que passa pelo centro da O. O segmento externo da secante é igual a quatro vêzes o diâmetro da O. Calcular o segmento AB.

39. A base maior de um trapézio isósceles circunscrito mede 13,8m. Um dos lados iguais do mesmo trapézio mede 9,2m. Calcular a base menor e o raio da O inscrita.

40. Uma O está inscrita em um trapézio isósceles. O raio da O mede 5m e um dos lados não ‖ mede 16m. Calcular as duas bases do trapézio.

41. Em um △ ABC, $a = 7$m, $b = 8$m e $c = 9$m. Calcular o raio da O circunscrita. (§ 96)

42. Dividir um segmento de 200m em média e extrema razão. (resolução algébrica)

43. Dividir um segmento retilíneo com 8cm em média e extrema razão. (resolução geométrica)

44. O segmento maior de um segmento que foi dividido em média e extrema razão, mede 3,5m. Calcular o comprimento do segmento.

45. O segmento menor de um segmento que foi dividido em média e extrema razão, mede 2,6m. Calcular o comprimento do segmento.

46. Em uma O traça-se um diâmetro AB. Em seguida, traçam-se as cordas AC e BD. A corda AC mede 2,3m e sua projeção AM sôbre AB mede 0,8m. A projeção NB, de BD sôbre BA mede 1,2m. Calcular o diâmetro da O e o comprimento da corda BD.

47. Em uma O cujo raio mede 25m, traça-se uma corda com 7m de comprimento. Calcular a flecha da corda do arco duplo.

48. Em uma O tem-se uma corda com 4,4m; a corda do arco duplo mede 7,2m. Pede-se o diâmetro da O.

49. Uma O tem 25m de raio. Por um ponto situado a 40m do centro, traça-se uma secante cujo segmento externo é o triplo do segmento interno. Calcular o comprimento de toda a secante.

50. A corda de uma O mede 24m. A flecha do arco duplo mede 1,5m. Pede-se o raio da O.

51. Os raios de duas Ⓢ medem respectivamente 11m e 25m. A linha dos centros mede 50m. Calcular o comprimento da tangente comum exterior às duas Ⓢ.

52. No exercício anterior calcular o comprimento da tangente comum interior.

53. Os raios de duas Ⓢ secantes medem respectivamente 7m e 6m. A corda comum mede 3m. Calcular o comprimento da maior secante comum às duas Ⓢ.

N. B. A maior secante comum a duas Ⓢ é a secante traçada por um dos pontos de intersecção das duas Ⓢ, e ‖ à linha dos centros.

CAPÍTULO X

Polígonos Regulares

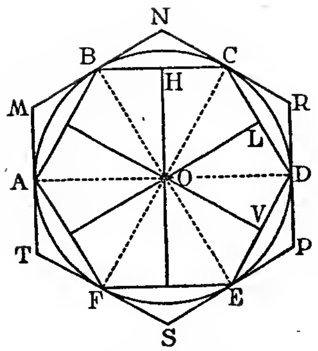


Fig. 55

101. Teoremas fundamentais. **Teorema.** *Se dividirmos uma circunferência em* **n** *partes iguais e unirmos os pontos de divisão, formaremos um polígono regular inscrito; se traçarmos tangentes pelos pontos de divisão, estas formarão um polígono regular circunscrito.*

Seja a ○ de centro O, dividida em n partes iguais. Unindo os pontos de divisão, formaremos o polígono ABCDEFA. Os lados dêste polígono são iguais porque a arcos iguais AB, BC, CD, etc., correspondem cordas iguais AB, BC, CD, etc..

Quanto aos ∡, são todos ∡ inscritos e cada um dêles, por exemplo o ∠A, tem por medida a metade do arco BCDEF, isto é, a metade de um arco constituído por $n-2$ divisões da O. Ora, se todas as divisões da ○ são iguais, todos os ∡ são iguais. Portanto, o polígono ABCDEFA, tendo os lados iguais e os ∡ iguais, é regular.

Para provar que o polígono circunscrito, MNRPSTM é regular, comparemos os △ ABM, BCN, CDR, DEP, EFS e FAT. Nestes △ temos AB = BC = CD = DE = EF = FA por hipótese. (A circunferência está dividida em n arcos iguais, e a arcos iguais correspondem cordas iguais.) Quanto aos ∡ adjacentes aos lados AB, BC, CD, DE, EF e FA, são todos iguais porque cada um dêles tem por medida a metade do arco AB, ou do arco BC, ou do arco CD, etc., e êstes arcos são iguais. (E.M.T.V. § 153) Portanto, todos os △ são iguais de acôrdo com o 1.º caso de igualdade, e são isósceles. Donde resulta que os ∡ M, N, R, P, S e T são iguais. Quanto aos lados, temos AM=MB=BN=NC=CR=RD, etc..

Logo, MN=NR=RP, etc.. Portanto, o polígono MNRPSTM, tendo lados iguais e ∡ iguais, é regular.

Centro de um polígono regular é o centro das Ⓢ inscrita e circunscrita. *Raio* de um polígono regular é o segmento que une o centro do polígono a um dos vértices; é o raio da ○ circunscrita. *Apótema* de um polígono regular é a ⊥ a um dos lados, traçada pelo centro do polígono; é o raio da ○ inscrita; OH, OL, etc., são apótemas. (fig. 55) Todos os apótemas de um polígono regular são iguais, porque cordas iguais distam igualmente do centro; um apótema divide o lado do polígono regular em duas partes iguais, porque toda a ⊥ a uma corda, traçada pelo centro da O, divide a corda em duas partes iguais. (E.M.T.V § (139 e 140)

Chama-se ∠ cêntrico de um polígono regular ao ∠ formado por dois raios consecutivos do polígono.

Recíproca. *Todo o polígono regular é inscritível e circunscritível.* (Ao cuidado do estudante)

Exercícios em classe

1. Qual o valor do ∠ cêntrico de um polígono regular de n lados?

2. Demonstrar que o ∠ cêntrico de um polígono regular de n lados e o ∠ do mesmo polígono, são suplementares.

3. Demonstrar que o raio de um polígono regular é bissetriz do ∠ do mesmo polígono.

4. Demonstrar que o apótema de um polígono regular é bissetriz do ∠ cêntrico do mesmo polígono.

5. Demonstrar que o ∠ externo de um polígono regular é igual ao ∠ cêntrico do mesmo polígono.

Teorema. *Dado um polígono regular inscrito, se prolongarmos os apótemas até encontrarem a circunferência, e se traçarmos tangentes pelos pontos assim determinados, estas tangentes formarão um polígono regular circunscrito.*

Seja o polígono regular inscrito com n lados, ABCD...; tracemos os apótemas OE, OF, OG, ..., prolonguemos êstes apótemas até encontrarem a ○ e, pelos pontos H, I, J, ..., tracemos tangentes. Vamos provar que o polígono MNRS... é um polígono regular de n lados. O arco AB é $\frac{1}{n}$ da ○ (por que?); logo o

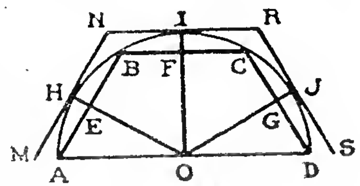


Fig. 56

arco AH é $\frac{1}{2n}$ da O. (por que?) Ora, se cada um dos arcos AH, HB, BI, IC, etc., é $\frac{1}{2n}$ da O, conclue-se que cada um dos arcos HI, IJ, etc., representa $\frac{1}{n}$ da O. Logo, os pontos H, I, J, etc., dividem a O em n partes iguais e o polígono MNRS... é um polígono regular circunscrito, de acôrdo com o primeiro teorema dêste parágrafo.

Exercícios em classe

1. Demonstrar que os lados dos dois polígonos são paralelos. (fig. 56)
2. Demonstrar que o raio OB do polígono inscrito coincide, em direção, com o raio ON do polígono circunscrito. (fig. 56)

Teorema. *Quando dois polígonos regulares são semelhantes, a razão de seus perímetros é igual à razão de seus raios ou de seus apótemas.*

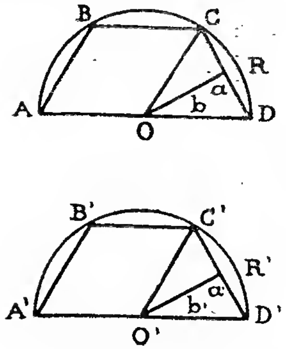


Fig. 57

Dois polígonos regulares são semelhantes quando têm o mesmo número de lados; a razão dos perímetros de dois polígonos semelhantes é igual à razão de dois lados homólogos. (§ 87) Consideremos os polígonos regulares ABCD... e A'B'C'D'... com n lados cada um. (fig. 57) Designando os seus perímetros por P e P' teremos:

$$\frac{P}{P'} = \frac{CD}{C'D'}$$

Tracemos os apótemas OR e O'R', os raios OC e O'C' e consideremos os ⩓ ORD e O'R'D'. Os ∡ a e a' são iguais. (por que?) Os ∡ b e b' também são iguais. (por que?) Logo, os ⩓ são semelhantes (§ 86) e teremos: $\frac{OD}{O'D'} = \frac{OR}{O'R'} = \frac{RD}{R'D'}$. Mas,

$$\frac{RD}{R'D'} = \frac{2RD}{2R'D'} = \frac{CD}{C'D'}$$

Logo, $$\frac{P}{P'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{OD}{O'D'} = \frac{OR}{O'R'}$$

Representando os perímetros de dois polígonos regulares semelhantes por p e p', os apótemas por a e a', os lados por l e l' e os raios por r e r', teremos: $\frac{p}{p'} = \frac{l}{l'} = \frac{r}{r'} = \frac{a}{a'}$.

102. Inscrição dos polígonos regulares de 4×2^n lados. Na expressão 4×2^n, fazendo sucessivamente n igual a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc., teremos 4, 8, 16, 32, 64, etc.. Vejamos como se inscrevem em uma O, os polígonos regulares de 4, 8, 16, 32, 64, ... lados. Começaremos pelo polígono regular de quatro lados, isto é, o quadrado.

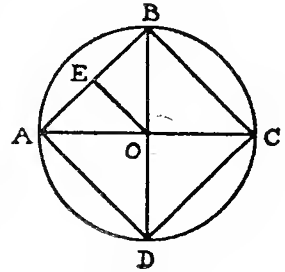


Fig. 58

Em uma O de centro O traçamos dois diâmetros ⊥s entre sí, AC e BD. Os quatro ∡ centrais assim formados são iguais por serem retos; então os arcos AB, BC, CD e DA são iguais. Neste caso, unindo os pontos de divisão A, B, C e D, teremos um polígono regular inscrito de 4 lados. (§ 101) Vamos calcular o lado AB e o apótema OE do quadrado inscrito, em função do raio. O △ ABO é retângulo; logo, $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2$. Façamos AB = l, OA = r, OE = a.

$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2$ (§ 90) $\therefore$	$\overline{OE}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AE}^2$ (§ 90) $\therefore$
$l^2 = r^2 + r^2$ $\therefore$	$a^2 = r^2 - \left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2$ $\therefore$
$l^2 = 2r^2$ $\therefore$	$a^2 = r^2 - \frac{2r^2}{4}$ $\therefore$
$l = r\sqrt{2}$	$a^2 = \frac{2r^2}{4}$ $\therefore$
	$a = \frac{r\sqrt{2}}{2}$

Portanto, em uma O cujo raio mede r, o lado e o apótema do quadrado nela inscrito medem respectivamente $r\sqrt{2}$ e $\frac{r\sqrt{2}}{2}$.

Vejamos agora como se inscreve um octógono regular em uma O. Seja AB o lado de um quadrado inscrito em uma O

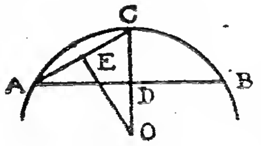


Fig. 59

de centro O. (fig.59) Determinamos o meio C do arco AB, prolongando o apótema OD até encontrar a O no ponto C. Sendo o arco AB um quarto da O, o arco AC é um oitavo. Logo, a corda AC é o lado do octógono regular inscrito. Vamos calcular o lado AC e o apótema OE do octógono regular inscrito, em função do raio. Lembremos que a corda é média geométrica entre sua projeção sôbre o diâmetro que passa por uma das suas extremidades, e o diâmetro inteiro. (§ 95) Portanto,

$$\overline{AC}^2 = CD \times 2r \qquad (I)$$

Nós não conhecemos CD. Mas $CD = OC - OD$ e $OD = \frac{r\sqrt{2}}{2}$ (apótema do quadrado inscrito). Voltando à igualdade (I) e fazendo $AC = l$, teremos:

$$l^2 = (OC - OD) \times 2r \quad \therefore \qquad l^2 = \left(r - \frac{r\sqrt{2}}{2}\right) \times 2r \quad \therefore$$

$$l^2 = 2r^2 - r^2\sqrt{2} \quad \therefore \qquad l^2 = r^2(2 - \sqrt{2}) \quad \therefore \qquad l = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Para calcular o apótema OE, consideremos o △ retângulo OEC. Fazendo $OE = a$ e $OC = r$, teremos:

$$\overline{OE}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{EC}^2$$

$$a^2 = r^2 - \left(\frac{r\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2$$

$$a^2 = r^2 - \frac{r^2(2-\sqrt{2})}{4}$$

$$a^2 = \frac{4r^2 - 2r^2 + r^2\sqrt{2}}{4}$$

$$a^2 = \frac{2r^2 + r^2\sqrt{2}}{4}$$

$$a = \frac{r\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Exercícios em classe

1. Calcular o lado e o apótema de um octógono regular inscrito em uma O cujo raio mede 15m.

2. Provar que o lado e o apótema de um polígono regular inscrito com 16 lados, em uma O cujo raio é r, medem respectivamente

$$r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \quad \text{e} \quad \frac{r\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2}$$

103. Inscrição dos polígonos regulares de 3×2^n lados. Na expressão 3×2^n, fazendo sucessivamente n igual a 0, 1, 2, 3, 4, etc., teremos 3, 6, 12, 24, 48, etc.. Vejamos como se inscrevem em uma O, os polígonos regulares de 3, 6, 12... lados.

Começaremos pela inscrição do polígono regular de 6 lados, isto é, o hexágono.

Êste problema já foi resolvido. (E.M.T.V. § 158) Vimos então que *o lado do hexágono regular inscrito é igual ao raio*. Calculemos o apótema OM dêste polígono. No △ retângulo OMA (fig. 60), temos:

$$\overline{OM}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AM}^2 \qquad (I)$$

Fazendo $OM = a$ e $OA = r$, e lembrando que $AF = OA$, teremos:

$$a^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 \quad \therefore \quad a^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} \quad \therefore \quad a^2 = \frac{3r^2}{4} \quad \therefore \quad a = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, em uma O cujo raio mede r, o lado e o apótema do hexágono regular nela inscrito medem respectivamente r e $\frac{r\sqrt{3}}{2}$.

Para inscrever um △ equilátero em uma O, é necessário primeiramente, dividí-la em 6 partes iguais e, em seguida, unir os pontos de divisão, de 2 em 2. O △ ACE é um △ equilátero inscrito. Vamos calcular AC em função do raio. Tracemos o raio OC. A figura ABCO é um losango. (por que?) Então suas diagonais AC e OB são ⊥s entre sí, e se dividem recìprocamente em partes iguais. Para calcular AC, é bastante calcular AN e multiplicar o resultado por 2. Teremos:

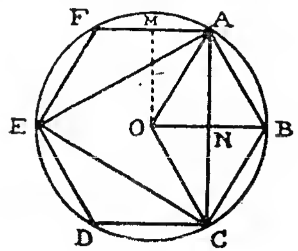


Fig. 60

$$\overline{AN}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{ON}^2 \quad \therefore \quad \overline{AN}^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} \quad \therefore \quad \overline{AN}^2 = \frac{3r^2}{4} \quad \therefore$$

$$AN = \frac{r\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \quad 2AN = r\sqrt{3}$$

Quanto ao apótema do △ equilátero, êle é a metade do raio. Portanto, em uma O cujo raio mede r, o lado e o apótema do △ equilátero nela inscrito medem respectivamente $r\sqrt{3}$ e $\frac{r}{2}$.

Recomendamos aos estudantes o quadro seguinte:

Em uma ○ *cujo raio mede* **r**:
lado triâng. equil. inscr. $= r \times \sqrt{3}$; *apót.* $= r \times \frac{\sqrt{1}}{2}$
lado quadrado inscrito $= r \times \sqrt{2}$; *apót.* $= r \times \frac{\sqrt{2}}{2}$
lado hex. regul. inscrito $= r \times \sqrt{1}$; *apót.* $= r = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Passemos à inscrição do polígono regular de 12 lados. Seja AB o lado do hexágono regular inscrito e OD o apótema. (fig.59) Prolongando OD até encontrar a ○, e unindo o ponto A ao ponto C, a corda AC será o lado do polígono regular de 12 lados. (por que?)

Vamos calcular AC. Aplicando um teorema conhecido (§ 95) teremos:

$$\overline{AC}^2 = CD \times 2r \qquad \overline{AC}^2 = 2r^2 - r^2\sqrt{3}$$

$$\overline{AC}^2 = (OC - OD) \times 2r \qquad \overline{AC}^2 = r^2(2 - \sqrt{3})$$

$$\overline{AC}^2 = \left(r - \frac{r\sqrt{3}}{2}\right) \times 2r \qquad AC = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Para calcular o apótema OE consideremos o △ retângulo OEC. (fig.59) Teremos:

$$\overline{OE}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{CE}^2 \qquad \overline{OE}^2 = \frac{4r^2 - 2r^2 + r^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\overline{OE}^2 = r^2 - \left(\frac{r\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}\right)^2 \qquad \overline{OE}^2 = \frac{2r^2 + r^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\overline{OE}^2 = r^2 - \frac{r^2(2 - \sqrt{3})}{4} \qquad OE = \frac{r\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

Exercícios em classe

1. Calcular o lado e o apótema de um hexágono regular inscrito em uma ○ cujo raio mede 16m.
2. Calcular o lado e o apótema de um △ equilátero inscrito em uma ○ cujo raio mede 25m.
3. Demonstrar que o lado e o apótema de um polígono regular com 24 lados, inscrito em uma ○ cujo raio é r, medem respectivamente

$$r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \quad \text{e} \quad \frac{r\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2}$$

104. Inscrição dos polígonos regulares de 5×2^n lados. Na expressão 5×2^n, fazendo sucessivamente n igual a 0, 1, 2, 3, etc., teremos 5, 10, 20, 40, etc.. Vejamos como se inscrevem em uma ○, os polígonos regulares de 5, 10, 20, 40, ... lados.

Começaremos pela inscrição do polígono regular de 10 lados.

Suponhamos o problema resolvido e seja AB (fig.61) o lado do decágono regular inscrito.

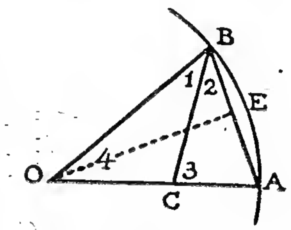


Fig. 61

Vamos demonstrar que o lado do decágono regular inscrito é o segmento maior do raio, quando êste é dividido em média e extrema razão. (§ 100)

O △ AOB é isósceles; portanto, $\hat{O} = 36°$, $\hat{A} = 72°$ e $\hat{B} = 72°$. Tracemos a bissetriz do ∠ B; teremos $\hat{1} = 36°$ e $\hat{2} = 36°$. Donde $\hat{3} = 72°$. Então o △ ABC é isósceles. Sendo $\hat{1} = \hat{4}$, o △ OBC também é isósceles. Logo, OC = BC = AB. Sendo BC a bissetriz do ∠ B, teremos $\frac{OC}{AC} = \frac{OB}{AB}$. (§ 83)

Substituindo nesta proporção os diferentes segmentos que ela contém, pelos segmentos iguais contidos no raio OA, teremos:

$$\frac{OC}{AC} = \frac{OA}{OC} \quad \therefore \quad \overline{OC}^2 = OA.AC$$

E sendo OC = AB, $\overline{AB}^2 = OA.AC$.

Portanto, o lado do decágono regular inscrito é igual ao segmento maior do raio, quando êste é dividido em média e ex-

trema razão. Segue-se que, sendo o raio igual a r, o lado do decágono regular inscrito é igual a $\frac{r(\sqrt{5}-1)}{2}$. (§ 100)

Calculemos o apótema OE. (fig.61) No △ retângulo OAE temos:

$$\overline{OE}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AE}^2$$

$$\overline{OE}^2 = r^2 - \left[\frac{r(\sqrt{5}-1)}{4}\right]^2$$

$$\overline{OE}^2 = r^2 - \frac{r^2(\sqrt{5}-1)^2}{16}$$

$$\overline{OE}^2 = \frac{16r^2 - r^2(5-2\sqrt{5}+1)}{16}$$

$$\overline{OE}^2 = \frac{16r^2 - 6r^2 + 2r^2\sqrt{5}}{16}$$

$$\overline{OE}^2 = \frac{10r^2 + 2r^2\sqrt{5}}{16}$$

$$OE = \frac{r\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

Para inscrever um pentágono regular em uma O, dividimos primeiramente a O em 10 partes iguais; em seguida, unimos os pontos de divisão, de 2 em 2.

Exercícios em classe

1. Calcular o lado e o apótema do pentágono regular inscrito em função do raio.

Conhecemos AC e OE (fig. 59) respectivamente lado e apótema do decágono regular inscrito. Queremos calcular AB e OD, respectivamente lado e apótema do pentágono regular inscrito.

Da equação AC = CD × 2r, na qual conhecemos AC e r, tiramos o valor de CD. O △ retângulo ADC dar-nos-á então o valor de AD, que é a metade de AB, etc.. Acharemos

$$AB = \frac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} \qquad OD = \frac{r(\sqrt{5}+1)}{4}$$

105. Lado do polígono regular de $2n$ lados em função do de n lados. Sendo dados o raio de uma O e o lado de um polígono regular nela inscrito, com n lados, podemos sempre calcular o lado de um polígono regular inscrito na mesma O, porém com número duplo de lados, isto é, $2n$ lados.

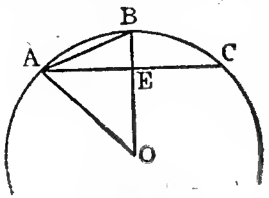


Fig. 62

Sejam OA$=r$ e AC$=l$ o raio e o lado de um polígono regular inscrito com n lados, na O de centro O. Traçando OB ⊥ AC, o arco AC fica dividido em duas partes iguais;

a corda AB será o lado do polígono regular inscrito na mesma O, com $2n$ lados; o segmento OE, ao qual chamaremos a, será o apótema do polígono regular com n lados. Ora:

$$\overline{AB}^2 = BE \times 2r \quad (§ 95) \qquad (1)$$

Precisamos eliminar BE.

$$BE = OB - OE = r - a \qquad (2)$$

Para determinar **a**, *apótema do polígono regular inscrito com* **n** *lados*, recorremos ao △ retângulo OEA.

$$a^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AE}^2 = r^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{4r^2 - l^2}{4} \quad \therefore \quad a = \frac{\sqrt{4r^2 - l^2}}{2} \qquad (3)$$

Voltando à equação (2) teremos:

$$BE = r - \frac{\sqrt{4r^2 - l^2}}{2} \qquad (4)$$

Entrando na equação (1) com o valor de BE dado pela equação (4) resulta:

$$\overline{AB}^2 = 2r\left(r - \frac{\sqrt{4r^2 - l^2}}{2}\right) = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l^2} \quad \therefore$$

$$AB = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l^2}} \qquad (5)$$

Nas equações (3) e (5) façamos $r = 1$. Teremos:

$$\boxed{a = \frac{\sqrt{4 - l^2}}{2}} \ \text{(A)} \qquad \boxed{AB = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l^2}}} \ \text{(B)}$$

Em resumo, sendo dados o raio r e o lado l de um polígono regular inscrito com n lados, a fórmula (A) nos dá o apótema a dêste polígono; a fórmula (B) nos dá o lado AB de um polígono regular inscrito na mesma O, com $2n$ lados.

Observação. Resolvendo questões práticas ou teóricas, relativas aos polígonos regulares, convém fazer o raio igual à unidade. Em seguida, se o raio não é igual à unidade, basta lembrar que, *quando dois polígonos regulares são semelhantes, seus lados estão entre si como os apótemas ou os raios das inscritas ou circunscritas.* (§ 101)

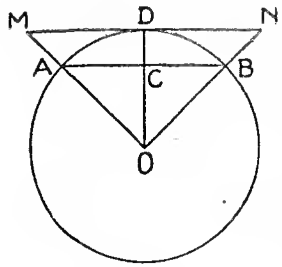


Fig. 63

Problema. *Sendo dados o lado e o raio de um polígono regular inscrito, calcular o lado de um polígono regular circunscrito semelhante.*

Seja $AB = l$ o lado de um polígono regular inscrito em uma ○ cujo raio é 1. Tracemos o apótema $OC = a$, prolongado até encontrar a ○ no ponto D; em seguida, tracemos pelo ponto D uma tangente à mesma ○, limitada pelos raios OA e OB convenientemente prolongados; MN será o lado de um polígono regular circunscrito à mesma ○, também com n lados. (§ 101)

Dos △ semelhantes AOC e MOD, resulta:

$$\frac{MD}{AC} = \frac{OD}{OC} \quad \therefore \quad MD : \frac{l}{2} :: 1 : a \qquad (1)$$

Porém $\quad a = \dfrac{\sqrt{4 - l^2}}{2} \qquad \boxed{\textit{fórmula } \mathrm{A}}$

Substituindo em (1) teremos:

$$MD : \frac{l}{2} :: 1 : \frac{\sqrt{4 - l^2}}{2} \quad \therefore \quad MD = \frac{l}{\sqrt{4 - l^2}}$$

E sendo $MN = 2MD$ teremos, finalmente:

$$\boxed{MN = \frac{2l}{\sqrt{4 - l^2}}} \qquad (C)$$

Exercícios. Série XLVIII

1. O raio de uma ○ mede 4,2m. Calcular o lado e o apótema do △ equilátero inscrito.

2. O raio de uma ○ mede 3,5m. Calcular o lado e o apótema do quadrado inscrito.

3. O raio de uma ○ mede 72m. Calcular o lado e o apótema do pentágono regular inscrito.

4. O raio de uma ○ mede 4,2. Calcular o lado e o apótema do hexágono regular inscrito.

5. O raio de uma ○ mede 5,5m. Calcular o lado e o apótema do octógono regular inscrito.

6. O raio de uma ○ mede 40m. Calcular o lado e o apótema do decágono regular inscrito.

7. O raio de uma ○ mede 60m. Calcular o lado e o apótema do dodecágono regular inscrito.

8. O lado de um △ equilátero inscrito mede 40m. Calcular o raio.

9. O lado de um quadrado inscrito mede 50m. Calcular o raio.

10. O lado de um pentágono regular inscrito mede 80m. Calcular o raio.

11. O lado de um octógono regular inscrito mede 20m. Calcular o raio.

12. O lado de um decágono regular inscrito mede 40m. Calcular o raio.

13. O lado de um dodecágono regular inscrito mede 60m. Calcular o raio.

14. O apótema de um △ equilátero inscrito mede 5m. Calcular o raio do polígono e o lado.

15. O apótema de um quadrado inscrito mede 6m. Calcular o raio do polígono e o lado.

16. O apótema de um pentágono regular inscrito mede 7m. Calcular o raio do polígono e o lado.

17. O apótema de um hexágono regular inscrito mede 8m. Calcular o raio do polígono e o lado.

18. O apótema de um octógono regular inserito mede 9m. Calcular o raio do polígono e o lado.

19. O apótema de um decágono regular inscrito mede 10m. Calcular o raio do polígono e o lado.

20. O apótema de um dodecágono regular inscrito mede 12m. Calcular o raio do polígono e o lado.

21. O lado de um △ equilátero inscrito mede $\sqrt{1\,200}$. Calcular o raio, o apótema e a altura do △.

22. O raio de uma ○ mede 16m. Calcular o perímetro do △ equilátero circunscrito.

23. O lado de um △ equilátero circunscrito mede 12m. Pede-se o raio e o apótema.

24. O lado de um quadrado inscrito mede $\sqrt{1{,}98}$. Pede-se o raio.

25. O lado de um quadrado inscrito mede $\sqrt{20}$. Pede-se o raio.

26. O lado de um pentágono regular inscrito mede $\sqrt{30}$. Pede-se o raio.

27. O lado de um octógono regular inscrito mede $\sqrt{40}$. Pede-se o raio.

28. O lado de um decágono regular inscrito mede $\sqrt{50}$. Pede-se o raio.

29. O lado de um dodecágono regular inscrito mede $\sqrt{60}$. Pede-se o raio.

30. O lado de um quadrado inscrito mede $\sqrt{18}$. Calcular o perímetro do quadrado circunscrito.

31. O raio de uma ○ mede 12m. Calcular o lado e o apótema do hexágono regular circunscrito.

32. O lado de um octógono regular inscrito mede 24m; calcular o lado do octógono regular circunscrito.

33. Em uma mesma ○ estão inscritos um hexágono regular e um △ equilátero. A soma dos perímetros dos dois polígonos é igual a 50m. Pede-se o raio.

34. Calcular o perímetro de um quadrado cuja diagonal é o apótema de um quadrado inscrito em uma O cujo raio mede 20m.

35. Em uma mesma O estão inscritos um quadrado e um △ equilátero. Sendo a soma dos perímetros dos dois polígonos igual a 48m, pede-se o raio da O.

36. O lado de um hexágono regular inscrito mede 25m. Calcular o perímetro do decágono regular inscrito na mesma O.

37. Uma corda de 15m está situada a 12m do centro de uma O. Calcular o lado e o apótema de um △ equilátero inscrito na mesma O.

38. A diagonal de um quadrado inscrito mede 15m. Calcular o lado de um decágono regular inscrito na mesma O.

39. Em uma O inscreve-se um quadrado cujo lado mede $\sqrt{15}$. Calcular o raio da O e o lado do quadrado circunscrito.

40. Em uma O inscreve-se um △ equilátero e circunscreve-se outro △ também equilátero. Calcular o raio, sabendo que a soma dos dois perímetros é 14,4m.

41. Dado um quadrado ABCD, ligam-se os meios dos lados dêste quadrado, formando um segundo quadrado MNRS. Calcular o lado do quadrado maior, sabendo que a soma dos perímetros dos dois quadrados é 120m.

N. B. A incógnita é o lado do quadrado ABCD, e será representada por $2x$.

42. Dado um quadrado ABCD, dividem-se seus lados em três partes iguais. Unem-se os pontos de divisão (em número de 8) formando um octógono convexo. Calcular o lado do quadrado, sabendo que a soma dos perímetros dos dois polígonos é 40m.

43. O lado de um hexágono regular inscrito mede 5m. Calcular o lado do octógono regular inscrito na mesma O.

44. O lado de um quadrado inscrito mede 5m. Calcular o lado do hexágono regular inscrito na mesma O.

45. O lado de um quadrado inscrito mede 8m. Calcular o lado do △ equilátero inscrito na mesma O.

CAPÍTULO XI

O Comprimento da Circunferência

106. Definição do comprimento de uma circunferência. E' evidente que um segmento retilíneo AB e um segmento curvilíneo CD não podem ser *iguais*, visto que não é possível fazê-los coincidir. Entretanto, podem ser *eqüivalentes*, isto é, *podem ter o mesmo comprimento.* A dificuldade, porém, consiste em determinar o comprimento do segmento curvilíneo.

Já aprendemos (E.M.S.V.) em que consiste a medição direta ou indireta de uma grandeza. Um segmento retilíneo pode ser medido diretamente; já não acontece o mesmo com um segmento curvilíneo, visto não ser possível aplicar sôbre êle as conhecidas unidades de comprimento.

Vimos também (E.M.P.V. § 28) como se poderia medir diretamente o comprimento da O, construindo um segmento retilíneo MN que é **a circunferência retificada** ou **a retificação da circunferência.** O processo então indicado é, porém, moroso e de resultados pouco precisos.

Vamos aprender agora o método racional para calcular o comprimento de uma O.

Chama-se limite de uma variável **x**, *que cresce (ou decresce) de um modo contínuo, um número constante* **L**, *do qual a variável* **x** *se aproxima cada vez mais, sem nunca atingí-lo, e de modo que a diferença* **L − x** *possa tornar-se e permanecer menor de que qualquer número dado, por muito pequeno que êste seja.*

E dizemos, neste caso, que a variável x tende para o limite L.

Se dividirmos uma O em n partes iguais e unirmos os pontos de divisão, formaremos um polígono regular inscrito. (§ 101) Construído êste polígono, se, na mesma O, inscrevermos polígonos regulares com $2n$, $4n$, 8 ., etc., lados, o perímetro de cada um dêstes polígonos vai aumentando constantemente, como é fácil provar, e podemos então induzir que, sendo n bastante grande,

o contôrno do polígono tende a confundir-se com a ○. Somos então levados à seguinte

Definição. *Chama-se* **comprimento de uma circunferência,** *o limite para o qual tende o perímetro de um polígono regular convexo inscrito (ou circunscrito) quando se duplica indefinidamente o número de lados dêste polígono.*

107. Relação entre a circunferência e o diâmetro. *Duas circunferências quaisquer são proporcionais aos seus raios ou aos seus diâmetros.*

Consideremos duas Ⓢ quaisquer c e c' cujos raios são r e r'. Inscrevamos, em cada uma, um polígono regular com n lados. Sejam p e p' os perímetros dêstes dois polígonos; a e a' os respectivos apótemas. Os dois polígonos, sendo regulares e com o mesmo número de lados, são semelhantes; logo $\frac{p}{p'} = \frac{a}{a'}$ (I).

Duplicando o número de lados dos dois polígonos, a relação (I) continua a existir entre os polígonos de $2n$ lados cada um. Duplicando o número de lados dos segundos polígonos, os terceiros polígonos que assim se formam, com $4n$ lados, continuam a ser semelhantes e, portanto, ainda teremos $\frac{p}{p'} = \frac{a}{a'}$.

Mas, à medida que vamos duplicando o número de lados dos dois polígonos, seus perímetros aumentam constantemente, tendendo a confundir-se com as duas Ⓢ, seus apótemas também aumentam constantemente, tendendo a confundir-se com os raios das duas Ⓢ, e a relação (I) continua sempre a existir. No limite, isto é, quando n se torna infinitamente grande, os perímetros p e p' se confundem com as Ⓢ c e c', os apótemas se confundem com os raios r e r' e a relação (I) toma a forma $\frac{c}{c'} = \frac{r}{r'}$. Sendo $\frac{r}{r'} = \frac{2r}{2r'}$ e sendo $2r$ e $2r'$ iguais, respectivamente a d e d' (diâmetros), teremos $\frac{c}{c'} = \frac{r}{r'} = \frac{d}{d'}$, que é justamente o que queríamos provar.

Do exposto também se conclue que duas Ⓢ são duas figuras semelhantes, porque podem ser consideradas como os limites de dois polígonos regulares, com o mesmo número de lados, número êste que aumenta indefinidamente.

Corolário. *A razão entre uma circunferência qualquer e o seu diâmetro é constante.*

Com efeito, sendo c e c' duas Ⓢ cujos raios são r e r', já vimos que $\frac{c}{c'} = \frac{r}{r'}$ $\therefore$ $\frac{c}{c'} = \frac{2r}{2r'}$ $\therefore$ $\frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$ $\therefore$ $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$.

Se a razão entre c e d é igual à razão entre c' e d', segue-se que a razão entre uma ○ qualquer e o seu diâmetro é constante. Esta razão é um número irracional que se representa pela letra grega π. O valor de π, com sete algarismos decimais é 3,141 592 6. Na prática damos a π o valor 3,1416. (*)

Teorema. *O comprimento de uma circunferência é igual ao dôbro do raio multiplicado por* π.

Com efeito, desde que a razão entre a ○ e o diâmetro é igual a π, teremos: $\frac{C}{d} = \pi$ $\therefore$ $C = \pi \times d$ $\therefore$ $C = \pi \times 2r$ $\therefore$

$$\boxed{C = 2\pi r}$$

108. Cálculo de π. Da relação $C = 2\pi r$, deduzimos:

$$\pi = \frac{C}{2r} \qquad (1)$$

Vejamos agora como determinar o valor de π, com uma aproximação dada. Consideremos uma ○ cujo raio seja 1; a relação (1) se reduz a

$$\pi = \frac{C}{2} \qquad (2)$$

Isto pôsto, se pudermos calcular o comprimento de uma ○ cujo raio seja 1, a relação (2) nos diz que o valor de π será a metade do comprimento desta ○.

Consideremos dois polígonos regulares convexos, com o mesmo número de lados, (podem ser 6 lados) um inscrito e o outro circunscrito à ○ cujo raio é 1. Representando por p_6 e P_6, respectivamente, os perímetros dêstes dois hexágonos regulares, (**)

(*) E' um valor aproximado, com êrro inferior a 0,000 01 por excesso, aproximação suficiente para os exercícios de um curso ginasial.

(**) p_6 significa o perímetro do polígono regular inscrito com 6 lados, e P_6 o perímetro do polígono regular circunscrito, também com 6 lados.

sendo p_6 o perímetro do inscrito, e P_6 o perímetro do circunscrito, acharemos:

$$p_6 = 6{,}000\,0 \qquad P_6 = 6{,}928\,2$$

Observemos desde já que o comprimento da ○ está compreendido entre p_6 e P_6 isto é, $P_6 > ○ > p_6$. (§ 106) Portanto, p_6 e P_6 são dois valores aproximados do comprimento da ○, o primeiro por falta e o segundo por excesso.

Isto feito, calculemos agora os perímetros dos polígonos inscrito e circunscrito à mesma ○, porém com número duplo de lados, isto é, 12.

E sejam êles p_{12} e P_{12}. Ora, para calcular p_{12} calculamos em primeiro lugar o lado dêste polígono (§105, fórmula B) e multiplicamos o resultado por 12. E para calcular P_{12}, calculamos preliminarmente o lado do polígono regular inscrito com 12 lados (já o temos calculado); em seguida, calculamos o lado do polígono regular circunscrito com o mesmo número de lados (§105, fórmula C); finalmente, multiplicamos êste resultado por 12, e teremos P_{12}. Acharemos:

$$p_{12} = 6{,}211\,6 \qquad P_{12} = 6{,}430\,8$$

E, como acima, podemos concluir que:

$$6{,}211\,6 < \textit{comprimento da } ○ < 6{,}430\,8$$
$$(\textit{raio} = 1)$$

Continuando o nosso trabalho, calculemos os polígonos inscrito e circunscrito à mesma ○, tendo, respectivamente, 24, 48, 96, 192... lados. Os resultados obtidos serão os seguintes:

$$p_{24} = 6{,}265\,2 \qquad P_{24} = 6{,}319\,2$$
$$p_{48} = 6{,}278\,6 \qquad P_{48} = 6{,}292\,0$$
$$p_{96} = 6{,}282\,0 \qquad P_{96} = 6{,}285\,4$$
$$p_{192} = 6{,}282\,8 \qquad P_{192} = 6{,}283\,6$$

E podemos concluir que:

$$6{,}282\,8 < \textit{comprimento da } ○ < 6{,}283\,6$$
$$(\textit{raio} = 1)$$

Ora, $6{,}283\,6 - 6{,}282\,8 = 0{,}000\,8$.

Portanto, a ○ cujo raio é igual a 1 mede 6,283 com êrro inferior a 0,001 por falta. Donde resulta que:

$$\frac{C}{2} = 3{,}141 \quad \text{(com êrro inferior a 0,001 por falta)}$$

E, em virtude da relação (2):

$$\pi = 3{,}141 \quad \text{(com êrro inferior a 0,001 por falta)}$$

O método que acabámos de expor, para calcular π, é chamado **método dos perímetros.**

Observação. Em Matemática Superior aprende-se a calcular π de um modo muito mais simples e rápido, e aprende-se também que êste número é irracional.

109. O comprimento de um arco de círculo. Seja l o comprimento de um arco, em metros; seja n a sua amplitude, em graus ou grados; seja r o raio do arco. Vamos estabelecer as relações que ligam l, n e r.

A amplitude do arco é dada em graus; a ○ mede $2\pi r$ e tem 360 graus. Podemos pois estabelecer que:

$$\left\{\begin{aligned} &\textit{arco de } 1^\circ = \frac{2\pi r}{360} = \frac{\pi r}{180} \\ &\textit{arco de } 1' = \frac{2\pi r}{21\,600} = \frac{\pi r}{10\,800} \\ &\textit{arco de } 1'' = \frac{2\pi r}{1\,296\,000} = \frac{\pi r}{648\,000} \end{aligned}\right\} \therefore \left\{\begin{aligned} &l = \frac{\pi r n}{180} \quad (n \text{ graus}) \\ &l = \frac{\pi r n}{10\,800} \quad (n \text{ minutos}) \\ &l = \frac{\pi r n}{648\,000} \quad (n \text{ segundos}) \end{aligned}\right\}$$

Se a amplitude do arco é dada em grados, as operações se simplificam.

O arco de um grado mede $\dfrac{2\pi r}{400}$ ou $\dfrac{\pi r}{200}$;

O arco de **n** *grados mede* $\dfrac{\pi r n}{200}$. (E.M.S.V. § 27)

Exemplo. Qual o comprimento de um arco com 34,526 grados, em uma ○ cujo raio mede 10m?

Solução. $l = \dfrac{\pi r n}{200} = \dfrac{3{,}141\,6 \times 10 \times 34{,}526}{200}$

$l = 0{,}157\,08 \times 34{,}526 = 5{,}423\text{m}$

Exercícios em classe

1. O raio de uma ○ mede 10m. Quanto mede o lado do △ equilátero inscrito? E o arco que êste lado subtende?

2. Em uma ○ cujo raio mede 20m, qual a diferença entre o comprimento do lado do quadrado inscrito e o do arco que êste lado subtende?

3. O lado de um hexágono regular inscrito e o arco que êle subtende têm o mesmo comprimento? Se o raio da ○ mede 40m, qual a diferença entre os comprimentos dessas duas linhas?

110. O radiano. Para medir ângulos existe uma terceira unidade, o **radiante**, de larga aplicação em Matemática Superior.

Dois arcos são semelhantes quando correspondem a ângulos centrais iguais em circunferências com raios diferentes. Portanto, dois arcos semelhantes têm a mesma amplitude.

Teorema. *Dois arcos semelhantes são proporcionais aos seus raios.*

Sejam l e l' os comprimentos de dois arcos semelhantes; r e r' seus raios, e n a sua amplitude. Podemos escrever: (§ 109)

$$l = \frac{\pi r n}{180} \qquad l' = \frac{\pi r' n}{180}$$

E dividindo estas duas igualdades, membro a membro, teremos:

$$\frac{l}{l'} = \frac{r}{r'} \quad \text{C.Q.D.} \qquad (1)$$

Alternando os têrmos da proporção (1) resulta:

$$\frac{l}{r} = \frac{l'}{r'} \qquad (2)$$

A proporção (2) significa:

Dado um ∠ central A, o comprimento do arco correspondente pode variar, de acôrdo com o raio dêste mesmo arco; entretanto, a razão entre o comprimento do arco e o do raio é invariável.

Representando esta razão por α (*), escreveremos:

$$\alpha = \frac{l}{r} \qquad (3)$$

Assim pois, o número α pode ser adotado como medida de um ∠ central A, isto é, *um ∠ central A é medido numèricamente pela razão entre o comprimento do arco correspondente e o do raio dêste mesmo arco.*

Observação. O número α é abstrato, por ser a razão entre dois comprimentos.

Exercícios em classe. Supondo $r = 10$ é conveniente, antes de prosseguir esta lição, que os estudantes determinem o valor de α para ∡ centrais com 15°, 24°, 48°, 70°, 85°, etc..

Vejamos agora qual a condição para que tenhamos $\alpha = 1$ isto é, *qual a unidade angular neste novo sistema de medir ∡.* Ora,

(*) α, primeira letra do alfabeto grego, que se lê *alfa*; corresponde ao *a* português.

para termos $\alpha = 1$ é necessário que, na equação (3), tenhamos $l = r$. Portanto,

A unidade angular é um ângulo central cujo arco correspondente é igual ao raio dêste mesmo arco.

Esta unidade é chamada **radiante.** (*)

Voltando à equação (3) e fazendo o raio igual a **1**, isto é, *tomando o raio de uma* O *como* **unidade de comprimento,** *teremos*

$$\alpha = l$$

isto é, *o mesmo número mede o ângulo central e o arco que lhe corresponde.*

Quando o ∠ central é um radiante, o arco que lhe corresponde é chamado **radiano.** Donde a seguinte

> ***Definição.*** **Em uma circunferência cujo raio é tomado como unidade de comprimento, o radiano é um arco cujo comprimento é igual ao do raio.**

Observação. E' sabido que, um ∠ central e o arco correspondente são medidos pelo mesmo número, desde que as unidades escolhidas sejam respectivamente o ∠ reto e o quadrante.

Do mesmo modo, medindo um ∠ central em *radiantes* e o arco correspondente em *radianos*, os números resultantes serão os mesmos. Eis porque, na prática adota-se indiferentemente o *radiano* para medir ∡ centrais e os arcos correspondentes, não se fazendo uso do *radiante.*

O sistema que acabámos de expor, para medir ∡ e arcos é chamado **sistema circular.** O símbolo do radiano é *rd.*

Medir um arco em radianos é determinar o seu comprimento, tomando como unidade o raio da O ao qual o mesmo arco pertence. Um arco mede 3,375 radianos; isto significa que o comprimento do arco é igual a três raios (da mesma O) e mais 375 milésimos do mesmo raio. O arco central correspondente medirá 3 radiantes e 375 milésimos do radiante.

A O mede $2\pi r$; tomando como unidade o próprio raio, ela medirá 2π ou 6,2832 radianos.

Tomando como unidade o radiano, resultam, para certos arcos da O, as medidas seguintes:

(*) Francisco Severi, *Elementos de Geometria*, vol. II, pág. 94.

$$\begin{aligned}
\text{arco de } 360^\circ &= 2\pi &&= 6{,}2832 \text{ radianos}\\
\text{,, ,, } 180^\circ &= \pi &&= 3{,}1416 \text{ ,,}\\
\text{,, ,, } 90^\circ &= \frac{\pi}{2} &&= 1{,}5708 \text{ ,,}\\
\text{,, ,, } 1^\circ &= \frac{\pi}{180} &&= 0{,}0174 \text{ ,,}
\end{aligned}$$

A razão de duas grandezas homogêneas é igual à razão dos números que as representam, **desde que ambas sejam medidas com a mesma unidade.** (E.M.T.V.§ 147)

Portanto, a razão de duas grandezas homogêneas é independente da unidade com a qual as duas grandezas foram medidas. Isto pôsto, consideremos um arco AM, cuja medida em graus seja n; em grados, g; em radianos, rd. Consideremos um segundo arco AB, igual à metade de uma O. A definição acima nos permite escrever::

$$\frac{AM}{AB} = \frac{n}{180^\circ} = \frac{g}{200^g} = \frac{rd.}{\pi} \qquad (A)$$

Com as razões do grupo (A), dada a medida de um arco em uma das três unidades conhecidas, podemos convertê-la em outra das mesmas três.

Problema I. *Quantos graus mede um radiano?*

$$\frac{n^\circ}{180^\circ} = \frac{rd}{\pi} \therefore \frac{n^\circ}{180^\circ} = \frac{1}{\pi} \therefore n = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 17' 44'',80\ldots (*)$$

Problema II. *Quanto mede, em grados, um arco de 50°?*

$$\frac{50^\circ}{180^\circ} = \frac{g}{200^g} \therefore g = \frac{200\times 50}{180} = 55^g,5555\ldots\ldots$$

Problema III. *Quando mede, em radianos, um arco de 60°?*

$$\frac{60^\circ}{180^\circ} = \frac{rd}{\pi} \therefore rd = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3} = 1{,}047 \text{ radianos}$$

Problema IV. *Quanto mede, em radianos, um arco com n°?*

$$\frac{n^\circ}{180^\circ} = \frac{rd}{\pi} \therefore rd = \frac{\pi}{180} \times n$$

(*) Para calcular n, fizemos $\pi = 3{,}141\,592\,6$.

Exercícios. Série XLIX

1. Calcular o comprimento de uma O cujo raio mede 15m.
2. Calcular o comprimento de uma O cujo raio é igual ao lado de um quadrado inscrito numa O cujo raio mede 3m.
3. Calcular o raio de uma O cujo comprimento é de 7,5m.
4. Calcular o raio de uma O cujo comprimento é igual ao perímetro de um hexágono regular inscrito em uma O cujo raio mede 7m.
5. Calcular o raio de uma O cujo comprimento é igual ao perímetro de um △ equilátero inscrito em uma O cujo raio mede 5m.
6. O raio de uma O mede 15m. Calcular o comprimento de um arco de 32 graus.
7. O raio de uma O mede 2,5m. Calcular o comprimento de um arco de 27°24'.
8. O raio de uma O mede 3,2m. Calcular o comprimento de um arco de 42°13'25''.
9. O raio de uma O mede 2,5m. Calcular o comprimento de um arco de 48°20'30''.
10. O diâmetro de uma O mede 36m. Pede-se o comprimento de um arco de 36,45 grados.
11. O diâmetro de uma O mede 15m. Pede-se o comprimento de um arco igual a 0,7 do quadrante.

N. B. Calcular, em primeiro lugar, o comprimento da O, e dividir o resultado por 4; o quociente representará o comprimento do quadrante. Em seguida, uma regra de três simples resolverá o problema.

12. O diâmetro de uma O mede 24m. Pede-se o comprimento do oitante.
13. O diâmetro de uma O mede 8,4m. Calcular o comprimento de um arco igual a 0,35 do oitante.
14. O comprimento de um arco com 37°25'36'' é igual a 400m. Pede-se o raio do arco.
15. O comprimento de um arco com 45° é 600m. Pede-se o lado do hexágono regular inscrito na O ao qual pertence o arco dado.
16. O comprimento de um arco com 36^g é 8,5m. Pede-se o raio do arco.
17. O comprimento de um arco com 15°21'25' é igual a 15π (metros). Pede-se o raio.

N. B. Neste exercício não se deve substituir π pelo seu valor 3,1416.

18. Em uma O com 15m de raio, toma-se um arco com 13,6m. Calcular o número de graus dêste arco.
19. Em uma O com 36m de raio, toma-se um arco com 42m. Calcular o número de grados dêste arco.
20. O raio de uma O mede 45m. Um arco AB desta O tem um comprimento igual a 15/4 de π (metros). Calcular o número de graus dêste arco.

N. B. Neste exercício não se deve substituir π pelo seu valor 3,1416.

21. O raio de uma O mede 7,5m. Um arco AB desta O tem um comprimento igual a 12/5 de π (metros). Calcular o número de grados deste arco.
22. Calcular o raio de uma O cujo comprimento é igual a 36π (metros).

23.- Dois arcos AB e CD têm o mesmo comprimento. O arco AB tem 23°10′ e o arco CD, 15°20′. Sendo o raio do arco AB igual a 3,5m quanto mede o raio do arco CD?

24. Dois arcos AB e CD, com o mesmo número de graus, medem respectivamente 27m e 45m. Se o raio do arco AB mede 12,6m, quanto mede o raio do arco CD?

25. Dois arcos AB e CD, com o mesmo raio, medem respectivamente 3,1m e 4,2m. Se o arco AB tem 18°15′, quantos graus tem o arco CD?

26. Dois arcos AB e CD têm o mesmo comprimento. O raio do arco AB mede 15m e o raio do arco CD, 24m. Se o arco AB tem 42°20′, quantos graus tem o arco CD?

27. Em uma ○ cujo raio mede 3,5m, inscreve-se um hexágono. Calcular a diferença entre o comprimento da ○ e o perímetro do hexágono.

28. Em uma ○ cujo raio mede 4,2m, inscreve-se um △ equilátero. Calcular a diferença entre o comprimento da ○ e o perímetro do △.

29. O apótema de um hexágono regular inscrito mede 5,2m. Calcular o comprimento da ○.

30. O apótema de um △ equilátero inscrito mede 2,2m. Calcular o comprimento da ○.

31. A altura de um △ equilátero inscrito mede 15m. Calcular o comprimento da ○.

32. O perímetro de um hexágono regular mede 324m. Calcular a diferença entre os comprimentos das Ⓢ inscrita e circunscrita ao mesmo hexágono.

33. Em uma ○ cujo raio mede 20m, existe um setor (§ 116), cuja base tem 27°. Calcular o perímetro do setor.

34. O perímetro de um setor circular mede 80m e a base tem 45°. Pede-se o raio do setor.

35. Em uma ○ cujo raio mede 35m, tem-se um segmento (§ 116) cujo arco tem 36°. Calcular o perímetro do segmento.

36. Determinar os raios de duas Ⓢ concêntricas, sabendo que a diferença entre os comprimentos de ambas é 3,6m e que a soma dos raios é 15m.

37. São dadas duas Ⓢ concêntricas. Traça-se na maior uma corda tangente à menor. Esta corda mede 40m e o raio da ○ menor mede 10m. Calcular o comprimento da ○ maior.

38. São dadas duas Ⓢ concêntricas. Traça-se na maior uma corda tangente à menor. Esta corda mede 50m e o raio da ○ maior mede 120m. Calcular o comprimento da ○ menor.

CAPÍTULO XII

Áreas das Figuras Planas

111. Área do retângulo. Nem sempre duas superfícies planas limitadas podem coincidir inteiramente; entretanto, podem ter a mesma *área*; neste caso, não são *iguais*, mas são *eqüivalentes*.

A avaliação direta de uma área é problema muito difícil e, às vêzes, impossível. A avaliação das áreas se faz sempre indiretamente, mediante o emprêgo das relações que existem entre os elementos da figura cuja área se quer avaliar, relações estas cujo estudo constitue, em última análise, o objeto da Geometria.

Teorema. *A razão das áreas de dois retângulos que têm a mesma base, é igual à razão de suas alturas.*

Sejam os retângulos R e R′ (fig.64) cujas bases AB e A′B′ são iguais, e cujas alturas AC e A′C′ são diferentes. Admitamos que as duas alturas têm uma medida comum, a qual está contida 5 vêzes em AC e 2 vêzes em A′C′. Então $\frac{AC}{A'C'} = \frac{5}{2}$ (I). Pelos pontos de divisão tracemos ‖ às bases dos dois retângulos; êstes ficarão divididos respectivamente em 5 e 2 retângulos, todos iguais, porque têm a mesma base e a mesma altura. Tomando um dêstes retângulos, ABED ou **u**, para unidade de área, teremos: $R = 5u$ e $R' = 2u$ ∴ $\frac{R}{R'} = \frac{5}{2}$ (II). Comparando (I) e (II) teremos:

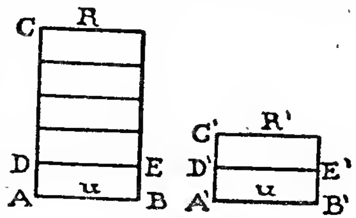


Fig. 64

$$\frac{R}{R'} = \frac{AC}{A'C'} \qquad \text{C.Q.D.}$$

Se as duas alturas são incomensuráveis, é fácil provar (E.M. T.V. § 150) que, mesmo neste caso, o teorema continua a subsistir.

Corolário. *A razão das áreas de dois retângulos que têm a mesma altura, é igual à razão de suas bases.*

Para provar êste corolário é bastante considerar os mesmos retângulos R e R′, dizer que os lados AB e A′B′ são as alturas e que AC e A′C′ são as bases, o que é permitido, porquanto a base de um retângulo é qualquer um de seus lados e a altura é o lado consecutivo.

Corolário. *As áreas de dois retângulos quaisquer são proporcionais aos produtos das bases pelas alturas.*

R	b	h
R′	b'	h'
R″	b	h'

Consideremos dois retângulos quaisquer R e R′, tendo por bases e alturas, respectivamente, **b** e **h**, **b′** e **h′**. Consideremos um terceiro retângulo R″, cuja base seja igual à base do retângulo R, e cuja altura seja igual à altura do retângulo R′.

Comparando os retângulos R e R″, teremos:

$$\frac{R}{R''} = \frac{h}{h'} \qquad (1)$$

Comparando os retângulos R′ e R″, teremos:

$$\frac{R'}{R''} = \frac{b'}{b} \qquad (2)$$

E dividindo membro a membro (1) por (2) resulta:

$$\frac{R}{R'} = \frac{bh}{b'h'} \qquad \text{C.Q.D.}$$

Por exemplo, dados dois retângulos R e R′, se a base e a altura do retângulo R são **b** e **h**, se a base e a altura do retângulo R′ são **3b** e **5h**, então a área do retângulo R′ é igual a **15** vêzes a área do retângulo R. Com efeito,

$$\frac{R}{R'} = \frac{bh}{3b \times 5h} \therefore \frac{R}{R'} = \frac{bh}{15bh} \therefore \frac{R}{R'} = \frac{1}{15} \therefore R' = 15R$$

Teorema. *Tomando como unidade de área, o quadrado construído sôbre a unidade de comprimento, a área de um retângulo*

é igual ao comprimento da base multiplicado pelo comprimento da altura.

De acôrdo com o teorema anterior, temos:

$$\frac{R}{R'} = \frac{bh}{b'h'} = \frac{b}{b'} \times \frac{h}{h'}$$

Admitamos que o retângulo R′ é um metro quadrado; então $b' = 1$ metro; $h' = 1$ metro, e teremos:

$$\frac{R}{1m^2} = \frac{b}{1m} \times \frac{h}{1m}$$

isto é, a área do retângulo é igual ao número que representa o comprimento da base, multiplicado pelo número que representa o comprimento da altura. Abreviadamente se diz que *a área de um retângulo é igual ao produto da base pela altura*, locução errada, porém aceitável, desde que se conheça o seu verdadeiro sentido.

Corolário. *A área de um quadrado é igual ao produto de um de seus lados por si mesmo.*

Com efeito, o quadrado é um retângulo cujos quatro lados são iguais; portanto, a base é igual à altura; nestas condições, designando a área de um quadrado por s e o lado por l, teremos $s = l \times l$ ou $s = l^2$. E eis por que a *segunda potência* de um número é também chamada *quadrado dêste número.*

112. Área do paralelogramo. Teorema. *A área de um paralelogramo é igual ao produto da base pela altura.*

Seja o ▱ ABCD. Tomando BC como base, a altura será a ⊥ AE. Tracemos por D, DF ⊥ BC. A figura AEFD é um retângulo. (por que?) Os $\triangle$ ABE e DCF são iguais. (por que?) Logo, o ▱ ABCD e o retângulo AEFD são eqüivalentes. (por que?) Mas a área do retângulo AEFD é igual a AD × AE. Logo,

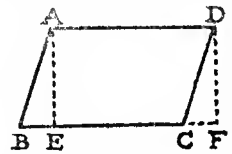


Fig. 65

área ▱ ABCD = AD × AE = BC × AE

Exercícios em classe

1. Provar que as áreas de dois ▱ com a mesma base são proporcionais às alturas.
2. Provar que as áreas de dois ▱ com a mesma altura são proporcionais às bases.

3. Provar que as áreas de dois ▱ quaisquer são proporcionais aos produtos das bases pelas alturas.
4. Desenhar uma série de ▱ com a mesma base e com a mesma altura, mas que não sejam iguais

113. Área do triângulo. Teorema. *A área do um triângulo é igual à metade do produto dos números que medem a base e a altura do mesmo triângulo.*

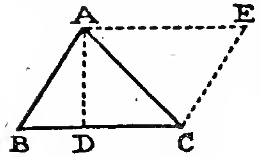


Fig. 66

Seja o △ ABC, de base BC e altura AD. Tracemos AE ∥ BC e CE ∥ AB. A figura ABCE é um ▱. (por que?) O △ ABC é a metade dêste ▱. (por que?) Ora,

$$\text{área } \square \text{ ABCE} = \text{BC} \times \text{AD} \quad \therefore$$

$$\text{área } \triangle \text{ ABC} = \frac{\text{BC} \times \text{AD}}{2}$$

Corolário. *A área de um losango é igual à metade do produto das diagonais.* (Ao cuidado do estudánte)

Exercícios em classe

1. Provar que as áreas de dois △ com a mesma base são proporcionais às alturas.
2. Provar que as áreas de dois △ com a mesma altura são proporcionais às bases.
3. Provar que as áreas de dois △ quaisquer são proporcionais aos produtos das bases pelas alturas.
4. Desenhar uma série de △ com a mesma base e com a mesma altura, mas que não sejam iguais.
5. Provar que os △ desenhados de acôrdo com o 4.° exercício, são eqüivalentes.
6. Dois △ ABC e A'B'C' são tais que a base do segundo contém 5 vêzes a base do primeiro, e a altura do segundo contém 6 vêzes a altura do primeiro. Qual a razão das duas áreas?

Problema I. *Calcular a área de um △ equilátero, em função do lado.* E' dado o lado AB ou l e pede-se a área do △ ABC. (fig. 67) Êste △ sendo equilátero, a altura AD é também mediana. Para calcular a área do △ ABC, temos a base BC ou l, mas não temos a altura. Aplicando ao △ retângulo ABD, o teorema de Pitágoras, teremos:

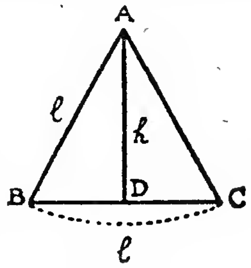


Fig. 67

$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} \quad \therefore \quad h^2 = \frac{3l^2}{4} \quad \therefore \quad h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Ora, sendo l a base do △ ABC, e sendo a altura, h, igual a $\frac{l\sqrt{3}}{2}$, teremos:

$$\text{área } \triangle \text{ ABC} = \frac{l}{2} \times \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

Portanto, a área de um △ equilátero à igual à quarta parte do quadrado do lado, multiplicada pela raiz de 3, isto é, por 1,732 050 8...

Problema II. *Deduzir a fórmula para calcular a área de um △ equilátero, em função da altura.* $\left(\text{área} = \frac{h^2\sqrt{3}}{3}\right)$

Problema III. *Calcular a área de um △ qualquer, em função dos três lados.* Se tomarmos o lado a como base, a altura relativa ao lado a será $\frac{2}{a}\sqrt{p(p-)(p-b)(p-c)}$. (§ 93)

Sendo a área de um △ igual à metade do produto da base pela altura, teremos:

$$\text{área } \triangle \text{ABC} = \frac{1}{2} \times a \times \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\text{área } \triangle \text{ ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Portanto, conhecidos os tres lados de um △ qualquer, sua área nos é dada pelo radical $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Problema IV. *Calcular o raio de uma ○ inscrita em um △, em função dos três lados.* Consideremos o △ ABC, e a ○ nele inscrita. (fig. 68) Sejam D, E e F os pontos de contacto dos lados do △ com a ○. Então os raios OD, OE e OF são ⊥s respectivamente, aos três lados do△. Ora,

$$\text{área } \triangle \text{ AOB} = \frac{cr}{2}$$

$$\text{área } \triangle \text{ AOC} = \frac{br}{2}$$

$$\text{área } \triangle \text{ BOC} = \frac{ar}{2}$$

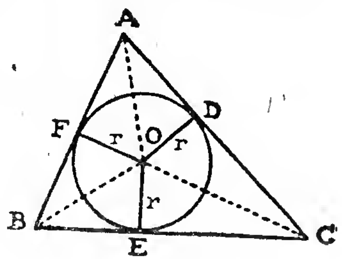


Fig. 68

Somando as três igualdades, chamando s à área do $\triangle$ ABC, e designando o perímetro do mesmo $\triangle$ por $2p$, teremos:

$$s = \frac{r(a+b+c)}{2} \; \therefore \; s = \frac{2pr}{2} \; \therefore \; s = pr \; \therefore \; r = \frac{s}{p} \; \therefore$$

$$r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$$

Portanto, o raio de uma ○ inscrita em um $\triangle$ é igual ao quociente da área do $\triangle$ pelo semiperímetro do mesmo $\triangle$.

Problema V. *Calcular o raio de uma ○ circunscrita a um $\triangle$, em função dos 3 lados.* Já foi resolvido. (§ 96)

114. Área do trapézio. Teorema. *A área de um trapézio qualquer é igual ao produto da semissoma das bases pela altura.*

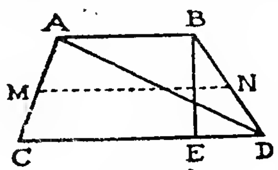


Fig. 69

Tracemos a diagonal AD e a altura BE do trapézio ABCD. A diagonal AD divide o trapézio em dois $\triangle$s: $\triangle$ ABD e $\triangle$ ACD. Tomando o lado AB do $\triangle$ ABD, a altura será BE; por base do mesmo $\triangle$, a altura será BE; tomando o lado CD do $\triangle$ ACD, por base do mesmo $\triangle$, a altura será BE. Ora,

$$\textit{área}\ \triangle\ ABD = \frac{AB}{2} \times BE; \quad \textit{área}\ \triangle\ ACD = \frac{CD}{2} \times BE \; \therefore$$

$$\textbf{área ABCD} = BE\left(\frac{AB}{2} + \frac{CD}{2}\right) = \frac{AB + CD}{2} \times BE$$

Exercício. *Provar que a área de um trapézio é igual ao produto da mediana ou base média* MN *pela altura.*

Para obter a área de um quadrilátero qualquer ou de um polígono irregular, decompõe-se a figura em $\triangle$s, e avalia-se a área de cada $\triangle$, pela fórmula $s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

115. Área do polígono regular. Teorema. *A área de um polígono regular é igual à metade do produto do perímetro do polígono, pelo apótema.*

Consideremos um polígono regular com n lados. (fig. 70) Traçando todos os raios do polígono, êle ficará decomposto em n $\triangle$s iguais. (por que?) Tomando como bases dêstes $\triangle$s os lados do polígono, todos êles terão a mesma altura OM, (por que?) que é também o apótema do polígono. Ora,

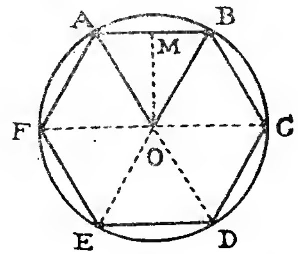


Fig. 70

$$\textbf{área}\ \triangle\ \textbf{ABO} = \frac{AB}{2} \times OM \; \therefore$$

$$\textbf{área polígono} = n \times \frac{AB}{2} \times OM =$$

$$= \frac{n \times AB \times OM}{2} = \frac{\textbf{perím.} \times \textbf{apót.}}{2}$$

116. Área do círculo. Teorema. *A área de um círculo é igual ao quadrado do raio multiplicado por π.*

Voltando ao teorema anterior observemos que, duplicando o número de lados do mesmo polígono, duplicando o número de lados do novo polígono, e assim sucessivamente, teremos sempre:

$$\textit{área polígono} = \frac{\textit{perím.} \times \textit{apót.}}{2}$$

Mas, levando a duplicação dos lados do polígono até o infinito, isto é, fazendo n infinitamente grande, o perímetro confundir-se-á com a ○, o apótema com o raio, e teremos:

$$\textit{área do círculo} = \frac{\textit{comprim. da ○} \times \textit{raio}}{2} = \frac{2\pi r \times r}{2} = \pi r^2$$

Exercício. *Demonstrar que as áreas de dois círculos são proporcionais aos quadrados dos raios.*

Teorema. *A área de um setor circular tem por medida o produto do comprimento da metade do arco que lhe serve de base, pelo comprimento do raio do mesmo setor.*

Chama-se *setor circular* a porção de círculo limitada por dois raios e pelo arco que êles interceptam na ○. Se dividirmos a ○ em 360 partes iguais e unirmos os pontos de divisão ao centro, o círculo ficará dividido em 360 setores, cada um de um grau. Ora, se a área do círculo é πr^2, a área do setor de um grau é $\frac{\pi r^2}{360}$ e a área do setor de n graus é $\frac{\pi r^2 n}{360} = \frac{\pi r n}{180} \times \frac{r}{2}$. Lembrando agora que $\frac{\pi r n}{180}$ é o comprimento l, de um arco de n graus (§ 109), teremos:

$$\textbf{área setor} = l \times \frac{r}{2} = \frac{lr}{2}$$

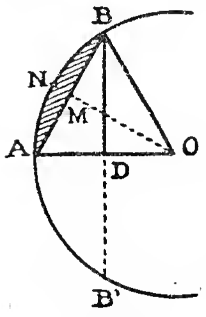


Fig. 71

Teorema. *A área de um segmento circular tem por medida a metade do produto do raio, pelo excesso do arco do segmento sôbre a semicorda do arco duplo.*

Chama-se *segmento circular* a porção de círculo compreendida entre um arco e a corda correspondente. Na fig. 71 o segmento circular é a porção hachuriada. Representá-lo-emos por ABN. A corda AB subtende o arco ANB, do segmento; a corda BB′ subtende o arco BAB′ que é o dôbro do arco ANB. Se AB o lado de um polígono regular do qual sabemos calcular o lado AB e o apótema OM, não necessitamos do teorema enunciado para calcular a área do segmento. Com efeito,

$$\textit{área segmento } \mathrm{ABN} = \textit{área setor } \mathrm{AOB} - \textit{área } \triangle\, \mathrm{AOB} \;\therefore$$

$$\textit{área segmento } \mathrm{ABN} = \frac{\textit{arco } \mathrm{AB} \times \mathrm{OA}}{2} - \frac{\mathrm{AB} \times \mathrm{OM}}{2} \quad (1)$$

Mas, se AB não é o lado de um polígono regular, então, de acôrdo com a fórmula (1), teremos:

$$\textit{área segmento } \mathrm{ABN} = \frac{\textit{arco } \mathrm{AB} \times \mathrm{OA}}{2} - \frac{\mathrm{BD} \times \mathrm{OA}}{2} \;\therefore$$

$$\textit{área segmento } \mathrm{ABN} = \frac{\mathrm{OA}\,(\textit{arco } \mathrm{AB} - \mathrm{BD})}{2} \quad (2)$$

resultado êste que demonstra o teorema inicial.

Entretanto, sòmente a Trigonometria nos permitirá calcular BD, para ser possível, em seguida, calcular a área do segmento ABN.

Observação. A fórmula (2) pode ser aplicada em qualquer caso.

Exercício. Provar que as áreas de dois setores semelhantes são proporcionais aos quadrados dos raios. *Dois setores são semelhantes quando seus ∡ centrais são iguais.*

Exercício. **Coroa** *é a porção de superfície plana limitada por duas ⓢ concêntricas.* Representando o raio da ○ maior por R, o da menor por r, e a área da coroa por s, provar que $s = \pi\,(R^2 - r^2)$.

117. Comparação de áreas. Teorema. *As áreas de dois triângulos que têm um ângulo igual ou suplementar são proporcionais aos produtos dos lados que compreendem êsse ângulo.*

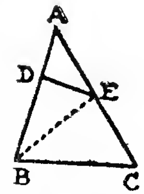


Fig. 72

1.° caso. Os ⚠ ABC e ADE têm um ∠ igual, A. Então podem ser colocados como se vê na figura 72. Unamos E com B e comparemos os ⚠ ADE e ABE. Tomando como bases os lados AD e AB, ambos têm a mesma altura, isto é, a ⊥ à AB traçada por E; logo, suas áreas são proporcionais às bases e teremos:

$$\frac{\textit{área } \triangle\,\mathrm{ADE}}{\textit{área } \triangle\,\mathrm{ABE}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}.$$

Comparemos os ⚠ ABE e ABC; tomando como bases AE e AC, ambos têm a mesma altura, isto é, a ⊥ à AC traçada por B; logo, suas áreas são proporcionais às bases e teremos:

$$\frac{\textit{área } \triangle\,\mathrm{ABC}}{\textit{área } \triangle\,\mathrm{ABE}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AE}}.$$

Dividindo (1) por (2) resulta:

$$\frac{\textit{área } \triangle\,\mathrm{ADE}}{\textit{área } \triangle\,\mathrm{ABC}} = \frac{\mathrm{AD} \times \mathrm{AE}}{\mathrm{AB} \times \mathrm{AC}}. \qquad \text{C. Q. D.}$$

2.° caso. Os ⚠ ABC e ADE têm um ∠ suplementar. Então podem ser colocados como se vê na figura 73. Unindo E com B e repetindo o que dissemos no 1.° caso, chegaremos facilmente à tese.

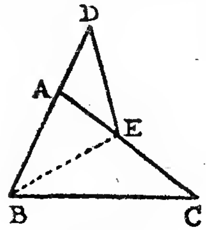


Fig. 73

Teorema. *As áreas de dois triângulos semelhantes são proporcionais aos quadrados de seus lados homólogos.*

Sejam os ⚠ semelhantes ABC e A′B′C′; de acôrdo com o teorema anterior, teremos:

$$\frac{\textit{área } \mathrm{ABC}}{\textit{área } \mathrm{A'B'C'}} = \frac{ab}{a'b'}. \quad \text{Mas } \frac{ab}{a'b'} = \frac{a}{a'} \times \frac{b}{b'}. \quad \text{Ora, } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \;\therefore$$

$$\frac{ab}{a'b'} = \frac{a}{a'} \times \frac{a}{a'} = \frac{a^2}{a'^2} \;\therefore$$

$$\frac{\textit{área } \mathrm{ABC}}{\textit{área } \mathrm{A'B'C'}} = \frac{a^2}{a'^2} \qquad \text{C. Q. D.}$$

Problema. Se os lados homólogos de dois △ semelhantes estão entre si como 8 está para 25, quantas vêzes a área do maior contém a do menor?

Teorema. *As áreas de dois polígonos semelhantes estão entre si como os quadrados de seus lados homólogos.*

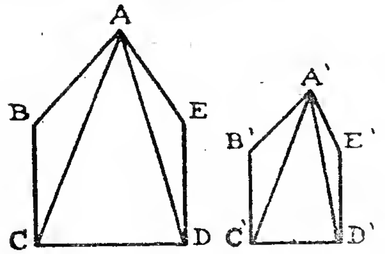


Fig. 74

Sejam P e P′ dois polígonos semelhantes. (fig.74) Pelos vértices homólogos A e A′ tracemos todas as diagonais possíveis; os dois polígonos ficarão decompostos em um mesmo número de △ semelhantes, e semelhantemente dispostos. Isto pôsto, teremos:

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2} \;\Big|\; \frac{ACD}{A'C'D'} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{C'D'}^2} \;\Big|\; \frac{ADE}{A'D'E'} = \frac{\overline{AE}^2}{\overline{A'E'}^2} \text{ (*)}$$

Em virtude da semelhança dos dois polígonos, os segundos membros destas três igualdades são iguais. Logo,

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{ACD}{A'C'D'} = \frac{ADE}{A'D'E'} \therefore \frac{ABC + ACD + ADE}{A'B'C' + A'C'D' + A'D'E'} =$$

$$= \frac{ABC}{A'B'C'} \therefore \frac{\textit{área polígono } P}{\textit{área polígono } P'} = \frac{\textit{área } \triangle\ ABC}{\textit{área } \triangle\ A'B'C'}$$

$$\text{Mas, } \frac{\textit{área } \triangle\ ABC}{\textit{área } \triangle\ A'B'C'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2} \therefore \frac{\textit{área polígono } P}{\textit{área polígono } P'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$$

Teorema. *As áreas de dois polígonos regulares semelhantes estão entre si como os quadrados de seus raios ou de seus apótemas.*

Sejam P e P′ dois polígonos regulares semelhantes, p e p' seus perímetros, r e r' seus raios, a e a' seus apótemas. Chamando s e s' as áreas dos dois polígonos, já sabemos que:

$$s = \frac{pa}{2} \quad s' = \frac{p'a'}{2} \;(\S 115) \therefore \frac{s}{s'} = \frac{pa}{p'a'} \therefore \frac{s}{s'} = \frac{p}{p'} \times \frac{a}{a'} \qquad (1)$$

$$\text{Mas, } \frac{p}{p'} = \frac{a}{a'} = \frac{r}{r'}. \quad (\S 101)$$

(*) Nestas igualdades, ABC, ABD, etc., representam as áreas dos △.

Substituindo em (1), teremos:

$$\frac{s}{s'} = \frac{a}{a'} \times \frac{a}{a'} \text{ ou } \frac{s}{s'} = \frac{r}{r'} \times \frac{r}{r'} \therefore \frac{s}{s'} = \frac{a^2}{a'^2} \text{ ou } \frac{s}{s'} = \frac{r^2}{r'^2}$$

Teorema. *As áreas de dois segmentos semelhantes são proporcionais aos quadrados dos raios.*

Chamam-se segmentos semelhantes, os segmentos cujos ∡ centrais são iguais. A área de um segmento é a diferença entre a área do setor correspondente e a área do △ que êste setor contém. Sejam s e t as áreas do setor e do △ cuja diferença constitue o primeiro segmento; sejam s' e t' as áreas do setor e do △ cuja diferença constitue o segundo segmento; sejam r e r' os raios das duas ⓢ. Já vimos que:

$$\frac{s}{s'} = \frac{r^2}{r'^2} \text{ e } \frac{t}{t'} = \frac{r^2}{r'^2} \therefore \frac{s}{s'} = \frac{t}{t'} = \frac{r^2}{r'^2} \therefore \text{(E.M.S.V. § 62, II)}$$

$$\frac{s - t}{s' - t'} = \frac{r^2}{r'^2} \therefore \frac{\textit{área do 1.º segm.}}{\textit{área do 2.º segm.}} = \frac{r^2}{r'^2}$$

118. O teorema de Pitágoras. *O quadrado construído sôbre a hipotenusa de um triângulo retângulo é eqüivalente à soma dos quadrados construídos sôbre os catetos.*

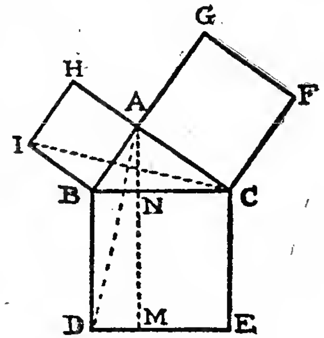


Fig. 75

Seja ABC o △ retângulo (fig.75); sôbre cada um de seus lados construamos um quadrado e tracemos AM ⊥ DE; depois tracemos os segmentos IC e AD. O retângulo BDMN tem por área BD × BN e o △ ABD tem por área $\frac{BD \times BN}{2}$; logo, o retângulo BDMN é o dôbro do △ ABD. O quadrado ABIH tem por área BI × BA e o △ IBC tem por área $\frac{BI \times BA}{2}$; logo, o quadrado ABIH é o dôbro do △ IBC. Mas, os △ IBC e ABD sendo iguais, o retângulo BDMN é eqüivalente ao quadrado ABIH. Traçando os segmentos AE e BF provaremos de modo análogo que o retângulo CEMN é eqüivalente ao quadrado ACFG. Logo,

o quadrado BCED é eqüivalente à soma dos quadrados ABIH e ACFG.

Corolário. *Se construirmos sôbre a hipotenusa* **BC** *e os catetos* **AB** *e* **AC**, *de um triângulo retângulo, três polígonos semelhantes,* **P**, **Q** *e* **R**, *teremos entre êles a relação* $\mathbf{P=Q+R}$. Com efeito os três polígonos sendo semelhantes, teremos:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{P}{Q}=\dfrac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2}\\[2ex] \dfrac{P}{R}=\dfrac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2}\end{array}\right\}\ (\S 116,\ 3.^{\circ}\ \text{teorema})\ \therefore\ \left\{\begin{array}{l}\dfrac{P}{\overline{BC}^2}=\dfrac{Q}{\overline{AB}^2}\\[2ex] \dfrac{P}{\overline{BC}^2}=\dfrac{R}{\overline{AC}^2}\end{array}\right\}\ \therefore$$

$$\frac{P}{\overline{BC}^2}=\frac{Q}{\overline{AB}^2}=\frac{R}{\overline{AC}^2}\ \therefore\ \frac{P}{\overline{BC}^2}=\frac{Q+R}{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2}$$

Nesta última igualdade, os denominadores são iguais; logo,

$$\mathbf{P=Q+R}$$

Problema. Construir um △ eqüivalente a um polígono dado. Seja o polígono ABCDEA. Traça-se por A uma diagonal qualquer AD; por E traça-se EF ∥ AD; prolonga-se CD até o ponto F; os ⊿ ADE e ADF são eqüivalentes porque têm a mesma base, AD, e suas alturas são iguais por serem ambas ⊥s à base AD e limitadas pelas ∥ AD e EF; logo, o polígono ABCDEA é eqüivalente ao quadrilátero ABCF. Neste quadrilátero traça-se a diagonal AC; por F traça-se FH ∥ AC; prolonga-se BC até encontrar FH; os ⊿ ACF e ACH são eqüivalentes porque têm a mesma base, AC, e suas alturas são iguais por serem ambas ⊥s à base AC e limitadas pelas ∥ AC e FH; logo, o quadrilátero ABCF ou o pentágono ABCDE é eqüivalente ao △ ABH.

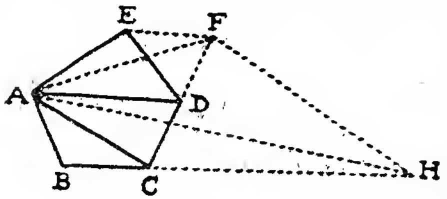


Fig. 76

Problema. Construir um quadrado eqüivalente a um polígono dado. Transforma-se o polígono em um △; em seguida, constrói-se a média geométrica entre a base do △ e a metade da altura, ou entre a altura e a metade da base.

Exercícios. Série L. A área do triângulo

N. B. Os comprimentos serão sempre calculados com êrro inferior a um milímetro, e as áreas com êrro inferior a um centímetro quadrado.

1. A área de um △ é igual a 17,48m². Sendo a base igual a 8,5m, pede-se a altura.

2. Calcular a base e a altura de um △ cuja área é 47,36m² sendo a altura igual a 8/5 da base.

3. Calcular a base e a altura de um △ com 50m² de área, sendo a base e a altura proporcionais aos números 5 e 8.

4. A base e a altura de um △ são iguais. Sendo a área de 9,68m², calcular a base e a altura.

5. Calcular os catetos de um △ retângulo cuja área é de 17m², sendo a hipotenusa igual a 9m.

6. Calcular os catetos de um △ retângulo cuja área é de 15m², sendo a hipotenusa igual a 10m.

7. A soma dos catetos de um △ retângulo é 17m e a área é de 31m². Calcular os dois catetos.

8. A diferença entre os catetos de um △ retângulo é 3m, e a área é 6m². Calcular os dois catetos.

9. Calcular os catetos de um △ retângulo, cuja área é de 80m², sendo os catetos proporcionais aos números 2 e 5.

10. Um dos catetos de um △ retângulo mede 12m e a hipotenusa, 17m. Pede-se a área do △.

11. Um dos catetos de um △ retângulo mede 12m, e a altura relativa à hipotenusa, 9m. Calcular a área do △.

12. Calcular a área de um △ equilátero, cujo lado mede 15m, sem recorrer às fórmulas.

13. A altura de um △ equilátero mede 12m. Calcular a área.

14. A área de um △ equilátero é de 36m². Calcular o lado.

15. A área de um △ equilátero é de 13m². Calcular a altura.

16. Calcular o lado de um △ equilátero cuja área é $\sqrt{363}$.

17. Calcular a área de um △ equilátero inscrito em uma ○ cujo raio mede 5m.

18. Calcular a área de um △ equilátero circunscrito a uma ○ cujo raio mede 5m.

N. B. O lado do △ equilátero circunscrito a uma ○ é igual ao dôbro do lado do △ equilátero inscrito na mesma ○. Os estudantes devem provar de um modo geral, e verificar pelos resultados dos exercícios 17 e 18; que a razão das áreas dos dois ⊿ é 4.

19. A área de um △ equilátero inscrito é $\sqrt{867}$. Calcular a área de um quadrado inscrito na mesma ○.

20. Um △ equilátero e um quadrado estão inscritos em uma mesma ○. Sendo a área do △ igual a 38m², qual é a área do quadrado?

21. Calcular a área de um △ isósceles, no qual a base mede 3,2m e cada um dos lados iguais, 5m.

22. A área de um △ isósceles é de 42m² e a base mede 10m. Calcular o comprimento de um dos lados iguais do △.

23. O perímetro de um $\triangle$ isósceles mede 15,6m. Sendo a base igual a 4,8m, pede-se a área do $\triangle$.

24. Em um $\triangle$ isósceles, a base é igual à quarta parte de um dos lados iguais. Sendo o perímetro do $\triangle$ igual a 23,4m, pede-se a área.

25. Em um $\triangle$ ABC temos a = 2,3m, b = 3,4m e c = 5,6m. Pede-se a área do $\triangle$.

26. Em um $\triangle$ ABC temos a = 5,1m, b = 6,2m e c = 7,3m. Calcular o raio da $\bigcirc$ circunscrita.

27. Em um $\triangle$ ABC temos a = 8m, b = 7m e c = 10m. Calcular o raio da $\bigcirc$ inscrita.

28. Em um $\triangle$ ABC temos a = 11m, b = 12m e c = 13m. Por cada um dos vértices do $\triangle$ ABC, traça-se uma $\parallel$ ao lado oposto, formando-se assim um $\triangle$ MNP. Calcular a área dêste $\triangle$.

29. Calcular a área de um $\triangle$ cujos lados são proporcionais aos números 4, 5 e 7, sendo o perímetro igual a 256m.

30. Em um $\triangle$ retângulo ABC, as projeções dos catetos AB e AC sôbre a hipotenusa BC, medem respectivamente 7m e 11m. Calcular a área do $\triangle$.

Exercícios. Série LI. A área do quadrilátero

1. Calcular as dimensões de um retângulo cuja área é de 60m², sendo elas proporcionais aos números 3 e 8.

2. Calcular as dimensões de um retângulo que tem 23,6m de perímetro e 14m² de área.

3. Um retângulo tem 37m² de área. A soma das suas dimensões é de 18m. Calcular as duas dimensões.

4. Um retângulo tem 22m² de área. A diferença entre suas dimensões é de 15m. Calcular as duas dimensões

5. O perímetro de um retângulo mede 32,4m. O comprimento do retângulo é igual a 7/3 da largura. Pede-se a área.

6. As dimensões de um retângulo são proporcionais aos números 3 e 5, e a diagonal mede 16m. Calcular a área.

7. Calcular a área de um retângulo inscrito em uma $\bigcirc$ cujo raio mede 12m, sabendo que a diferença entre a base e a altura do retângulo é de 22m.

8. A diagonal de um retângulo é igual a 5/3 da altura do mesmo retângulo. Sendo a área igual a 300m², pedem-se as duas dimensões.

9. Calcular a área de um retângulo cuja diagonal mede 16m e cuja base mede 11m.

10. O perímetro de um retângulo inscrito em uma $\bigcirc$ mede 80m. O raio mede 15m; pede-se a área do retângulo.

11. As dimensões de um retângulo são 6,5m e 3,2m. A diagonal de um outro retângulo semelhante ao primeiro mede 50m. Calcular a área do segundo retângulo.

12. Calcular o lado de um quadrado eqüivalente a um retângulo cujas dimensões são 9,7m e 4,5m.

13. A soma das áreas de dois quadrados é de 43,85m² e o produto das diagonais é 42,64m². Calcular o lado de cada um dos quadrados.

14. A soma da diagonal e do lado de um quadrado é igual a 30m. Calcular a área do quadrado.

15. Sôbre a diagonal de um quadrado, constrói-se um segundo quadrado. Sendo a soma das áreas dos dois quadrados igual a 1386,75m², pede-se o lado do primeiro quadrado.

16. Quanto mede o lado de um quadrado cuja área é eqüivalente à de um $\triangle$ que mede 11,5m de base e 18m de altura?

17. Quanto mede o lado de um quadrado cuja área é eqüivalente à de um $\triangle$ eqüilátero cujo lado mede 5m?

18. Um retângulo mede 25m de base e 12m de altura. O lado de um quadrado mede 4,2m. A área de um $\triangle$ é média geométrica das áreas do retângulo e do quadrado. Sendo a base do $\triangle$ igual a 12,35m, pede-se a altura.

19. O raio de uma $\bigcirc$ mede 1,5m. Calcular a área do quadrado inscrito e a do quadrado circunscrito à mesma $\bigcirc$.

20. O lado de um quadrado mede 3,8m. Unem-se os meios dos lados consecutivos dêste quadrado, formando-se assim um segundo quadrado do qual se pede a área. Estabelecer, de um modo geral, a relação existente entre as duas áreas.

21. Calcular a área de um losango cujas diagonais medem 7,5m e 4,2m.

22. A soma das diagonais de um losango é 5,2m e elas são proporcionais aos números 5 e 8. Pede-se a área do losango.

23. O perímetro de um losango mede 41,7m e uma das diagonais, 18m. Pede-se a área.

24. A área de um losango é de 360m². Uma das diagonais mede 40m. Calcular o lado do losango.

25. O lado de um losango mede 42m e um dos $\measuredangle$ agudos, 60°. Calcular as diagonais e a área do losango.

26. A altura de um losango mede 0,8m. Calcular o lado, sabendo que a área do losango é eqüivalente à área de um $\triangle$ que tem 2,2m de base e 1,8m de altura.

27. Calcular a área de um ▱ no qual dois lados adjacentes medem respectivamente 15m e 7m e formam um $\angle$ de 45°.

28. Calcular a área de um ▱ no qual dois lados adjacentes medem respectivamente 24m e 18m e formam um $\angle$ de 60°.

29. Calcular a área de um ▱ no qual dois lados adjacentes medem respectivamente 11m e 6m e formam um $\angle$ de 135°.

30. Calcular a área de um ▱ no qual dois lados adjacentes medem respectivamente 26m e 15m e um dos $\measuredangle$ obtusos é igual a 5 vêzes um dos $\measuredangle$ agudos.

31. Calcular a área de um ▱ no qual dois lados adjacentes medem respectivamente 30m e 18m e a projeção do menor sôbre o maior mede 3m.

32. As duas bases de um trapézio medem 11,7m e 6,5m; a altura mede 4,2m. Pede-se a área.

33. A área de um trapézio é igual a 36,84m². A altura mede 6m. Calcular as duas bases sabendo que sua diferença é de 4m.

34. Calcular a altura de um trapézio que tem 37,56m² de área e cujas bases medem respectivamente 15,7m e 9,6m.

35. Calcular a área de um trapézio isósceles no qual a base maior e um dos lados oblíquos adjacentes medem respectivamente 40m e 32m e formam um ∠ de 60°.

36. As bases de um trapézio medem 5,2m e 4,1m. Os lados não ∥ medem 3,4m e 2,5m. Pede-se a área.

37. As duas bases AB e CD de um trapézio ABCD medem respectivamente 36m e 28m e a altura tem 12m. Prolongam-se os lados não ∥ AD e BC até se encontrarem em um ponto E. Calcular a área do △ ABE.

38 A base de um △ mede 47m e a altura, 56m. Por um ponto tomado na altura, a 30 metros do vértice oposto à base, traça-se uma ∥ à base. Fica assim o △ dividido em duas partes, um trapézio e um △. Pede-se a área do trapézio.

39. A base menor de um trapézio é igual a 3/8 da maior; a altura do trapézio representa 2/11 da soma das bases; a área do trapézio é de 275m². Calcular as duas bases e a altura.

40. O lado de um △ equilátero é igual ao lado de um quadrado, e a soma das áreas destas duas figuras é de 36m². Calcular o lado do quadrado.

41. Um trapézio isósceles está circunscrito a uma ○ e tem 80m² de área. A soma das bases é de 20m. Calcular os quatro lados do trapézio.

42. Um trapézio e um retângulo têm a mesma área e a mesma altura. As bases do trapézio medem respectivamente 15,3m e 9,6m; a altura mede 7,5m. Pede-se a base do retângulo.

43. O perímetro de um trapézio isósceles mede 156m e as bases medem respectivamente 70m e 50m. Pede-se a área dêste trapézio.

44. Um trapézio tem 4,6m de altura, e o segmento que as diagonais determinam na mediana, 1,5m. Sendo a área do trapézio de 73,60m², calcular as duas bases do mesmo.

45. A base maior de um trapézio tem 125m. Os lados não ∥ formam com esta base ∡ respectivamente iguais a 60° e 45°. O trapézio tem 30m de altura. Pede-se a área.

46. As duas bases de um trapézio medem respectivamente 36m e 25m. A altura do trapézio mede 13m. Divide-se o trapézio em duas partes, traçando-se uma ∥ MN à base maior. Sendo a altura do trapézio inferior igual a 5m, pede-se a área de cada um dos trapézios.

47. Calcular a diagonal de um quadrado cuja área é igual à soma das áreas de dois quadrados cujas diagonais medem respectivamente 5m e 7m.

Exercícios. Série LII. A área dos polígonos regulares

1. Demonstrar que a área de um dodecágono regular inscrito, numa ○ de raio r, é igual a $3r^2$.

2. Demonstrar que a área de um octógono regular inscrito, numa ○ de raio r, é igual a $2r^2\sqrt{2}$.

3. A área de um hexágono regular inscrito é de 414m². Calcular o lado do hexágono.

4. Calcular a área de um dodecágono regular inscrito cujo lado mede 15m.

5. Calcular a área de um octógono regular inscrito em uma ○ cujo raio mede 10m.

6. Calcular a área de um decágono regular inscrito em uma ○ cujo raio mede 12m.

7. Calcular a diferença entre as áreas de um △ equilátero e de um quadrado, ambos inscritos em uma ○ cujo diâmetro mede 30m.

8. O lado de um hexágono regular mede 15m. Pede-se a área.

9. O lado de um decágono regular mede 20m. Pede-se a área.

10. O raio de uma ○ mede 8m. Calcular a área do hexágono regular circunscrito.

11. Demonstrar que a área de um hexágono regular circunscrito é igual a 4/3 da área do hexágono regular inscrito na mesma ○. (Fazer $r = 1$)

12. Determinar a razão das áreas de um △ equilátero e de um hexágono regular inscritos na mesma ○.

13. Um hexágono regular tem 400m² de área. Pede-se o lado, o apótema e o raio da ○ circunscrita.

14. A área de um quadrado inscrito é de 17,222 5m². Pede-se o lado, o apótema e o raio da ○ circunscrita.

15. A área de um △ equilátero inscrito é $48\sqrt{3}$. Pede-se o lado, o apótema e o raio da ○ circunscrita.

16. A área de um dodecágono regular inscrito é de 54,75m². Calcular a área de um quadrado inscrito na mesma ○.

17. Um △ equilátero e um hexágono estão inscritos em uma ○ cujo raio mede 1,5m. Pede-se a diferença entre as áreas dos dois polígonos.

18. A área de um hexágono regular é igual à área de um quadrado cuja diagonal mede 2,5m. Calcular o perímetro do hexágono.

19. A altura de um △ equilátero é $\sqrt{48}$. Constrói-se um quadrado eqüivalente a êste △. Tomando como raio a diagonal do quadrado, traça-se uma ○ na qual se inscreve um octógono regular. Calcular o lado dêste octógono.

20. A área de um △ equilátero inscrito é $10\sqrt{3}$. Calcular a área do dodecágono regular inscrito na mesma ○.

21. A área de um octógono regular é igual a $200\sqrt{2}$. Calcular o raio da ○ inscrita e da circunscrita.

22. Um círculo tem 254,469 6m² de área. Pede-se a área de um hexágono regular inscrito neste mesmo círculo.

23. O lado de um △ equilátero mede 40m. Pede-se a área do círculo circunscrito e a do inscrito.

Exercícios. Série LIII. A área do círculo

1. Calcular o comprimento da ○ cujo raio mede 4,15m.
2. Calcular a área de um círculo cujo raio mede 2,5m.
3. Calcular o raio de uma ○ cujo comprimento é de 360m.
4. Calcular o raio de um círculo cuja área é de 36,25m².
5. O número que mede a área de um círculo é igual a 12,4 vêzes o número que mede o comprimento da ○ do mesmo círculo. Pede-se o raio.

6. O raio de uma ○ mede 5,3m. Calcular a área do quadrante e do oitante.

7. Um segmento retilíneo AB mede 3,6m. Pelo ponto C, meio de AB, traça-se $CD \perp AB$. Sendo $CD = 1{,}2m$, calcular o comprimento da ○ que passa pelos pontos A, B e D, e a área do círculo correspondente.

8. A área de um círculo é de $800m^2$. Calcular o comprimento da ○.

9. O comprimento de uma ○ é de 500m. Pede-se a área do círculo.

10. O comprimento de uma ○ é igual a $\frac{15\pi}{2}$. Pede-se a área do círculo.

11. A área de um hexágono regular inscrito é de $48{,}36m^2$. Pede-se a área do círculo.

12. O raio de uma ○ tem 9m. Calcular a diferença entre as áreas do círculo e do hexágono regular nele inscritos.

13. Os raios de duas Ⓢ concêntricas medem respectivamente 3,4m e 4,5m. Pede-se a área da coroa.

14. Uma coroa tem $48{,}36m^2$ de área e 0,8m de largura. Pedem-se os raios das duas Ⓢ.

15. Duas Ⓢ são concêntricas. O raio da menor tem 5m. Uma corda da maior, tangente à menor, tem 6m. Calcular a área da coroa.

16. A área de uma coroa é de $40m^2$. Sendo o raio da ○ menor igual a 3m, pede-se a largura da coroa.

17. Duas Ⓢ são concêntricas; uma corda da maior é tangente à menor e mede 12m. Pede-se a área da coroa.

18. O raio de uma ○ mede 15m. Calcular a área de um setor com $23° 20' 30''$.

19. A área de um setor é de $48m^2$ e o raio mede 12m. Quantos graus tem o arco do setor?

20. A área de um setor é de $60m^2$ e o arco do setor tem $15° 20' 40''$. Pede-se o raio.

21. Calcular a área de um setor cujo raio mede 18m e cuja base mede 4,5m.

22. A área de um setor é de $80m^2$ e o arco que lhe serve de base mede 3m. Calcular o raio.

23. Os raios de duas Ⓢ concêntricas medem respectivamente 7m e 10m. Pede-se a área do setor de coroa com 36°.

24. Calcular a área do segmento de 30°, numa ○ cujo raio mede 12m.

25. Calcular a área do segmento de 60°, numa ○ cujo raio mede 15m.

26. Calcular a área do segmento de 45°, numa ○ cujo raio mede 18m.

27. O raio de uma ○ mede 40m. Traça-se uma segunda ○ concêntrica à primeira; esta divide o círculo maior em duas porções eqüivalentes. Calcular o raio da segunda ○.

28. As áreas de dois círculos estão entre si como 5 está para 80. Sendo o raio do menor igual a 2,4m, qual é o raio do maior?

29. Os comprimentos de duas Ⓢ estão entre si como 7 está para 91. Sendo o raio da menor igual a 5,2m, qual é o raio da maior?

NOTA

As soluções dos exercícios dados neste compêndio podem ser encontradas nos antigos livros de exercícios do mesmo autor, de acôrdo com as indicações que se seguem.

Série	1	Soluções ao cuidado do estudante.				
»	2	E. M. 5.ºA.,	série	14,	pág.	20 (1)
»	3	Soluções ao cuidado do estudante.				
»	4	E. M. 2.ºA.,	série	65,	pág.	79 (2)
»	5	»	»	66	»	81
»	6	»	»	67	»	85
»	7	»	»	68	»	87
»	8	»	»	69	»	90
»	9	»	»	70	»	90
»	10	»	»	71	»	91
»	11	»	»	72	»	94
»	12	»	»	73	»	95
»	13	E. M. 3.ºA.,	»	11	»	19 (3)
»	14	Soluções ao cuidado do estudante.				
»	15	E. M. 3.ºA.,	série	13,	pág.	24
»	16	»	»	14	»	26
»	17	»	»	15	»	29
»	18	»	»	16	»	30
»	19	E. M. 2.ºA.,	»	6	»	5
»	20	E. M. 3.ºA.,	»	6	»	11 (4)

(1) E. M. 5.ºA. significa *Exercícios de Matemática, Quinto Ano.*
(2) E. M. 2.ºA. » » » » , *Segundo Ano.*
(3) E. M. 3.ºA. » » » » , *Terceiro Ano.*
(4) Foram suprimidos os exercícios 11, 12, 21 e 22.

Série 21	E. M. 3.ºA.,	série	20 e 21,	pág.	33 e 35
» 22	»	»	23	»	36
» 23	»	»	24	»	37
» 24	»	»	25	»	38
» 25	»	»	26	»	38
» 26	»	»	27	»	39
» 27	»	»	28	»	40
» 28	»	»	29	»	41
» 29	»	»	30	»	42
» 30	»	»	31	»	44
» 31	»	»	32	»	45
» 32	»	»	33	»	45
» 33	»	»	34	»	51
» 34	»	»	37	»	51
» 35	»	»	38	»	52
» 36	»	»	40	»	55
» 37	»	»	41	»	58 (5)
» 38	»	»	00	»	00
» 39	E. M. 4.ºA.,	»	1	»	1 (6)
» 40	»	»	4	»	3
» 41	»	»	5	»	4
» 42	»	»	6	»	9
» 43	E. M. 3.ºA.,	»	52	»	105
» 44	»	»	53	»	109 (n.os 1 a 19)
» 45	»	»	53	»	109 (n.os 20 a 45)
» 46	»	»	54	»	114
» 47	»	»	55	»	127
» 48	E. M. 4.ºA.,	»	11	»	24
» 49	»	»	12	»	31
» 50	»	»	13	»	36
» 51	»	»	14	»	40
» 52	»	»	15	»	46
» 53	»	»	16	»	49

(5) Exceptuando os exercícios 1 a 32, e o n.º 70.
(6) E. M. 4.ºA. significa *Exercícios de Matemática, Quarto Ano.*